## 5 - 6 دریافت نمودن $\sin 60^\circ$ ، $\cos 60^\circ$ و $\tan 60^\circ$

اگر یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع

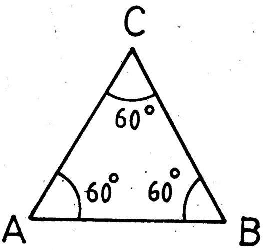
ABC را a بنامیم

شکل (6 - 9).

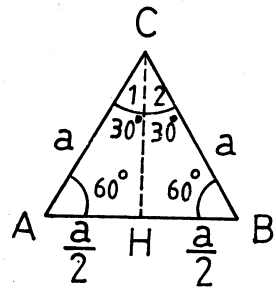
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$$

و

$$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong 60^\circ$$



(a)



(b)

شکل (6 - 9)

ارتفاع CH ضلع مقابل را بدو حصه مساوی تقسیم مینماید و نیز زاویه C را بدو حصه مساوی تقسیم میکند

$$\overline{AH} = \overline{HB} = \frac{a}{2}$$

$$\hat{C}_1 \cong \hat{C}_2 = 30^\circ$$

و

وهم نظر به قضیهٔ فیثاغورث داریم که :

$$\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2$$

$$\overline{CH}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\overline{CH}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\overline{CH}^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$\overline{CH}^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حالا میتوانید توابع مثلثاتی زوایای 60° و 30° را قرار شکل (6-9b) در مثلث AHC ذیلاً بنویسید.

$$\sin 60^\circ = \frac{CH}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{CH}{A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

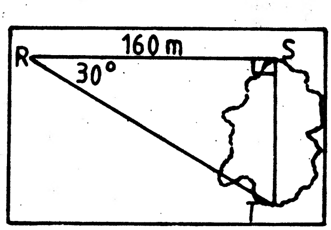
$$\tan 30^\circ = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**مثال اول:** در شکل (6-10) فاصله $\overline{ST}$ و $\overline{RT}$ را معلوم نمائید.

**حل:**

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{ST}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{ST}}{160} \quad \dots\dots\dots\dots (I)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots\dots\dots (II)$$




شکل (6-10)

از مقایسهٔ I و II داریم که:

$$\frac{\overline{ST}}{160} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{ST} = \frac{160\sqrt{3}}{3} = 92,4m$$

برای دریافت $\overline{RT}$ چنین عمل میکنیم ،

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{RS}}{\overline{RT}} = \frac{160}{\overline{RT}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV)$$

از مقایسهٔ III و IV چنین نتیجه حاصل میگردد .

$$\frac{160}{\overline{RT}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

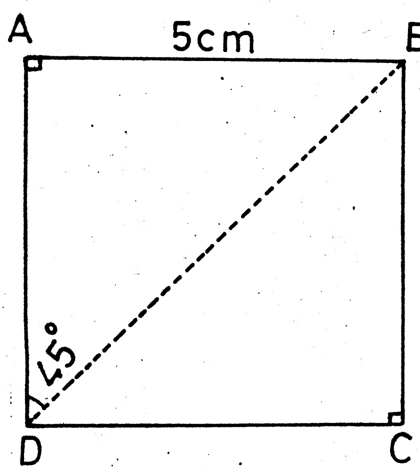
$$\overline{RT} = \frac{160 \times 2}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{RT} = \frac{320}{\sqrt{3}} = \frac{320\sqrt{3}}{3}$$

**مثال دوم :** شکل (6-11) یک مربع است طول قطر آنرا معلوم نمائید .

**حل :** اضلاع مربع باهم مساوی است

$$\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CD} = 5\,cm$$




شکل (6-11)

قطر مربع زوایای مربع را بدو حصه مساوی تقسیم مینماید

$$B\hat{D}A = D\hat{B}A = 45^\circ$$

$$\sin 45^\circ = \frac{5cm}{DB} \quad \ldots\ldots\ldots \quad I$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad II$$ ،

از مقایسه روابط I و II چنین نتیجه حاصل میشود :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5cm}{DB}$$

$$\overline{DB} = \frac{2 \times 5cm}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{DB} = 5\sqrt{2}\ cm .$$

# تمرینات فصل ششم

## گروپ اول

در سوالات ذیل قیمت A و B را محاسبه نمائید.

1- $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2- $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3- $A = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

4- $B = 2\tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

5- $A = \cos 60^\circ - \cos 30^\circ$

6- $B = \tan 60^\circ - 2\tan 30^\circ$

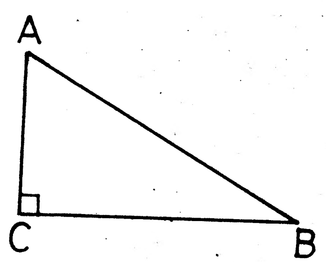
7- $A = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

8- $B = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ + \tan 30^\circ)$

9- $A = \sin 45^\circ - \tan 45^\circ$

10- $B = \sin 45^\circ - \cos 45^\circ$

a ، b ، c اضلاع مثلث قایم الزاویه ABC است. در سوالات ذیل آیا اعداد داده شده اضلاع مثلث مذکور را تشکیل میدهد اگر درست است مقابل آن علامه ( ✓ ) واگر غلط است مقابل آن علامه ( X ) را بگذارید. شکل (6-12)




شکل (6-12)

1- $a = 9$ $b = 21$ $c = 23$

2- $a = 4$ $b = 7$ $c = 8$

3- $a = 0{,}9$ $b = 4$ $c = 4{,}1$

4- $a = 4$ $b = 4$ $c = 4\sqrt{2}$

5- $a = \sqrt{5}$ $b = \sqrt{7}$ $c = \sqrt{12}$

6- $a = \sqrt{5}$ $b = \sqrt{6}$ $c = \sqrt{11}$

## گروپ دوم :

درسوالات ذیل دورجواب صحیح را دایره بکشید .

1 - دریک مثلث قایم الزاویه یک زاویه $90^\circ$ است مجموع دوزاویه دیگرآن عبارت است از :

a - $90^\circ$ b - $180^\circ$

c - $45^\circ$ d - $60^\circ$

2 - $\sin 60^\circ$ عبارت است از :

a - $\frac{1}{2}$ b - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c - $1$ d - هیچکدام

3 - $\sin 45^\circ$ عبارت است از :

a - $\frac{1}{2}$ b - $2$

c - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d - هرسه جواب درست است .

4 - $\sin 30^\circ$ و $\cos 60^\circ$ باهم چه ارتباط دارند ؟

a - مساوی اند b - مساوی نیستند

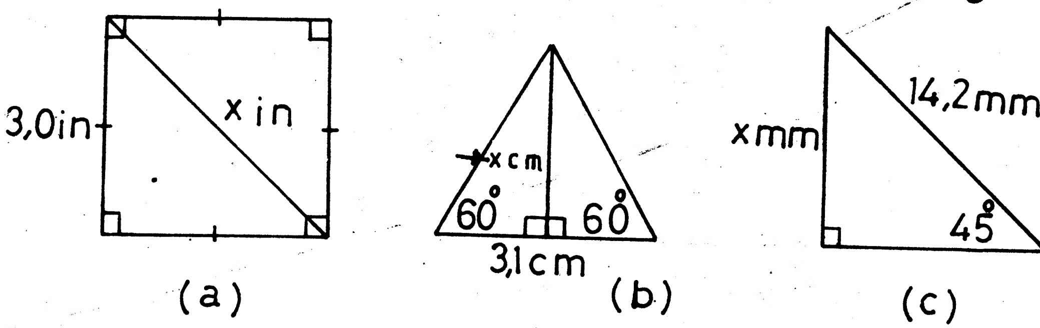
c - هردوغلط d - هردو درست است .

5 - دریک مثلث متساوی الاضلاع طول هرضلع آن $100\,m$ است . طول ارتفاع آن عبارت است از :

a - $50\sqrt{2}$ b - $50\sqrt{3}$

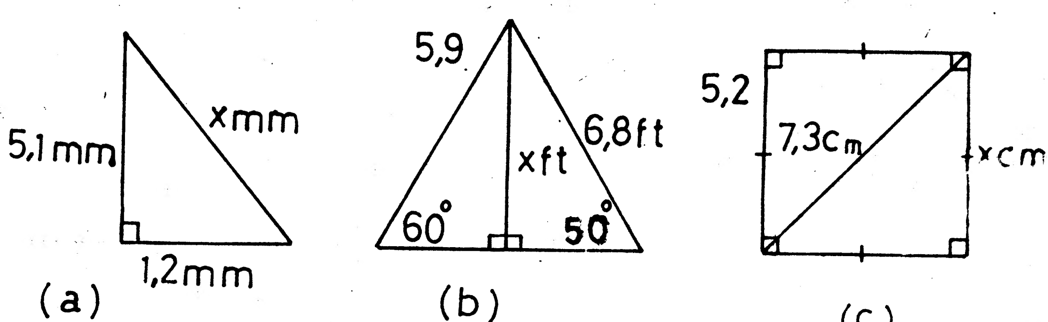
c - $40\sqrt{3}$ d - $70\sqrt{3}$

در شکل (6-13)، قیمت x را دریافت نمائید




شکل (6-13)

در شکل (6-14)، قیمت x را دریافت کنید.




شکل (6-14)

# فصل هفتم

## دایره

دایره عبارت ازیک منحنی بسته است که تمام نقاط این منحنی بسته ازیک نقطهٔ مستقر دارای عین فاصله اند .

### 1 - 7 محیط دایره :

طول منحنی بستهٔ که دایره را تشکیل میدهد محیط دایره نامیده میشود شکل ( 1 - 7 ) .

آیا شما میتوانید بگوئید که طول محیط دایره چند برابر قطر دایره است ؟

جواب سوال فوق را میتوانید ذیلاً ارایه نمائید محیط وقطر دایره ( اندازه گیری را میتوانید توسط فیتهٔ اندازه گیری ویا خط کش وتار انجام دهید) را اندازه نمائید اگر طول اندازه شده محیط را بر طول اندازه شده قطر تقسیم نمائید عدد 3,1 را تقریباً دریافت خواهید نمود شکل ( 2 - 7 )

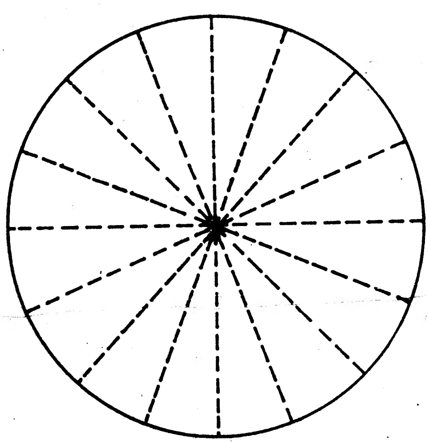
یعنی طول محیط دایره مساوی به 3,1 ضرب در قطر دایره متذکره است یعنی

$$\frac{\text{اندازه محیط دایره}}{\text{اندازه قطر دایره}} = 3{,}1$$

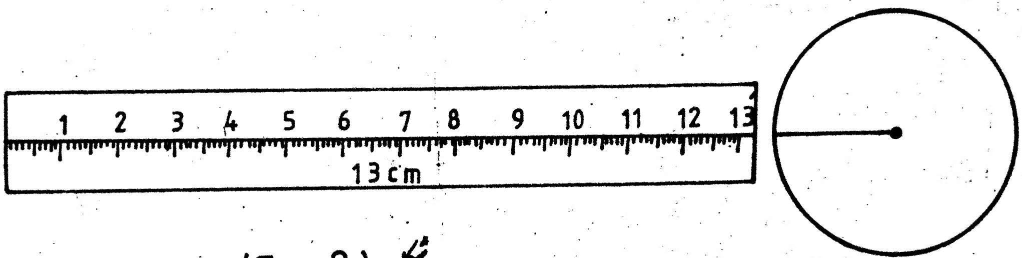
اگر محیط دایره را به C، شعاع دایره را به r نشان دهیم وچون قیمت π را به 3,1 نشان میدهد :

$$\frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}} \approx \frac{C}{2r} = 3{,}1 = \pi$$

ویا $C = 2\pi r$



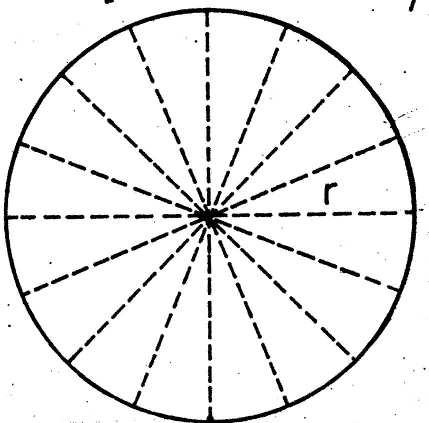
شکل ( 1 - 7 )




شکل (2 - 7)

علما زمان سابق π را دریافت نموده بودند که نسبت محیط بر قطر برای تمام دوایر یکسان است . احمس ریاضی دان مصری (1700 B.e) قیمت π را $\frac{256}{81} = 3,1605$ دریافت نموده بود ارشمیدس ریاضی دان یونانی قیمت π را بین $3\frac{10}{70} = 3,14286$ و $3\frac{10}{71} = 3,14085$ دریافت نمود لاکن درقرن پنجم میلادی ریاضی دان چینی قیمت π را بین 3,1415926 و 3,1415927 دریافت کرد ناگفته نباید گذاشت که تمام قیمت های فوق تقریبی است وقبل از بوجود آمدن کمپیوتر قیمت π را تا 707 خانهٔ اعشاریه حساب کردند ولی امروز توسط کمپیوتر قیمت π را تا 100000 خانهٔ اعشاریه محاسبه کرده اند درمسایل عادی روزمره قیمت $\pi = \frac{22}{7} = 3,142 = 3,14$ مورد استفاده قرارمیدهند .

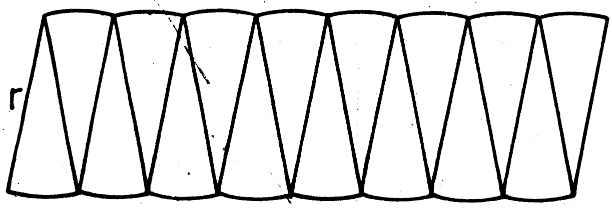
## 2 - 7 مساحت دایره :



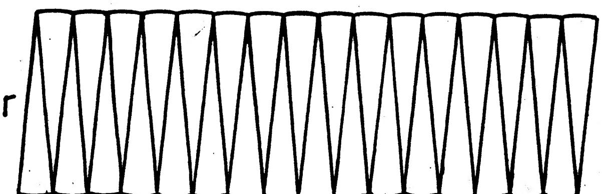

شکل (3 - 7)

اگر یک دایره را که شعاع آن r است به 16 حصهٔ مساوی مطابق شکل (3 - 7) تقسیم نمائیم و آنها را در مسیر خطوط نقطه چین قطع نموده پهلوی هم مطابق شکل (4 - 7) قرار دهیم شکل جدید حاصل شده مانند یک متوازی الاضلاع است که ضلع طویل آن موج دار است . اگر دایره را به 32 حصه مساوی تقسیم نموده ومطابق شکل (5 - 7) آنها را پهلوی هم

قرار دهیم موج ضلع طویل آن کمتر گردیده وشکل جدید تقریباً یک مستطیل را نشان میدهد اگر دایره را به عین ترتیب به 64 حصه مساوی تقسیم نموده وپهلوی هم قرار دهیم شکل حاصله یک مستطیل میباشد ومساحت مستطیل عبارت است از :




شکل ( 4 - 7 )




شکل ( 5 - 7 )

$A = a \cdot b =$ طول × عرض

چون محیط دایره $2\pi r$ است ونصف آن $\pi r$ میباشد در شکل ( 5 - 7 ) طول آن $\pi r$ وعرض آن $r$ است ونیز اگر مساحت شکل ( 5 - 7 ) را به $A$ نشان دهیم :

$$A = (\pi r) \cdot (r) = \pi r^2$$

**مثال اول :** اگر $\pi = 3,14$ باشد مساحت ومحیط دایره را دریافت نمائید که شعاع آن 5,4 باشد

$$A = \pi r^2 = (3,14)(5,4)^2$$

$$= (3,14)(29,16)$$

$$= 91,5624$$

$$C = 2\pi r = 2 \cdot (3,14)(5,4)$$

$$= 33,912$$

**مثال دوم :** شعاع یک چرخ 14 cm است چند دور باید بزند تا فاصله 9,68 m را طی نماید

محیط چرخ $= C = 2\pi r$

$$C = 2(3{,}14)(14\,cm)$$

$$= 87{,}92\,cm$$

فاصلهٔ طی شده 9,68 m متر و یا 968 cm است

تعداد دور $= \dfrac{968\,cm}{87{,}92\,cm} = 11{,}01$

## تمرین 1 - 7 :

در سوالات ذیل قیمت $\pi = \dfrac{22}{7}$ است.

1 - مساحت و محیط دوایری را دریافت نمائید که قطر آنها عبارت است از :

a - 7 cm　　b - 14 cm　　c - 28 cm

d - 16,8 cm　　e - 25,2 cm　　f - 63 cm

2 - مساحت و محیط دوایری را دریافت کنید که شعاع آنها عبارت است از :

a - $2\frac{1}{3}$ cm　　b - $2\frac{4}{5}$ cm

c - $5\frac{1}{4}$ cm　　d - $10\frac{1}{2}$ cm

3 - شعاع دوایری را دریافت نمائید که محیط آن قرار ذیل است.

a - $12\pi$ cm　　b - $17\pi$ cm

c - $\frac{45\pi}{2}$ cm　　d - $18\pi$ cm

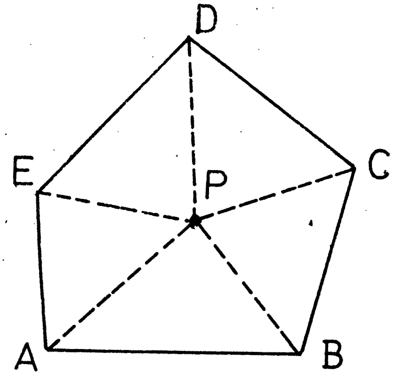
4 - اگر طول دقیقه گرد یک ساعت 5 cm باشد در مدت 45 دقیقه عقربه مذکور چقدر فاصله را طی میکند.

1-8-1 **قضیه :-** مجموعه وسعت زوایای داخلی هر مضلع مساوی به دوچند تعداد اضلاع مضلع منفی چهار قایمه است .

**مفروض :** ABCDE یک مضلع n ضلعی است ( n = 5 ، شکل ( 1-15 ) ،

**مطلوب :** میخواهیم ثبوت کنیم که مجموعه وسعت زوایای داخلی این مضلع مساوی به (2n-4) قایمه ویا $90^\circ$( 2n-4 ) است .

**ترسیم :** یک نقطه P را در داخل مضلع انتخاب کرده . P را به رأس های مضلع وصل میکنیم



شکل (1-15)

**ثبوت :** دیده میشود که مضلع به n مثلث ( در این حالت به پنج مثلث) تبدیل شده . چون زوایای داخلی هر مثلث $180^\circ$ ویا دو قایمه است پس مجموعه وسعت زوایای داخلی n عدد مثلث مساوی به 2n قایمه است . درجمله این 2n قایمه وسعت زوایای اطراف نقطهٔ P ( $360^\circ$ یا 4 قایمه ) نیز شامل است .

اگر $360^\circ$ یا چهار قایمه را از 2n قایمه منفی کنیم باقی مانده مجموع وسعت زوایای داخلی مضلع n ضلعی است یعنی :

مجموعه وسعت زوایای داخلی مضلع n ضلعی = ( 2n-4 ) قایمه .

درشکل ( 1-15 ) مجموعه زوایای داخلی عبارت است از :

$$(2n-4) \text{ قایمه } = (2\times5-4)\,90^\circ$$

$$= (6)\,90^\circ$$

$$= 540^\circ$$

درمقابل سوالات غلط (غ) ودرمقابل سوالات صحیح (ص) رابگذارید .

(    ) 1 - اگرشعاع یک دایره زیادشود طول محیط آن ثابت باقی میماند .

(    ) 2 - اگرقطریک دایره زیادشود طول محیط زیادشده ومساحت آن نیز زیاد میشود .

(    ) 3 - اگرمحیط یک دایره خُرد شود آیا مساحت آن خُرد میشود ؟

(    ) 4 - اگرمحیط یک دایره خُرد شود آیا مساحت دایره ثابت باقی میماند ؟

(    ) 5 - محیط وشعاع یک دایره را به $cm^2$ ومساحت آنرا به cm اندازه می نمائید .

## سوالات تکمیلی :

درسوالات ذیل جای های خالی راتوسط الفاظ ویاحروف مناسب تکمیل نمائید

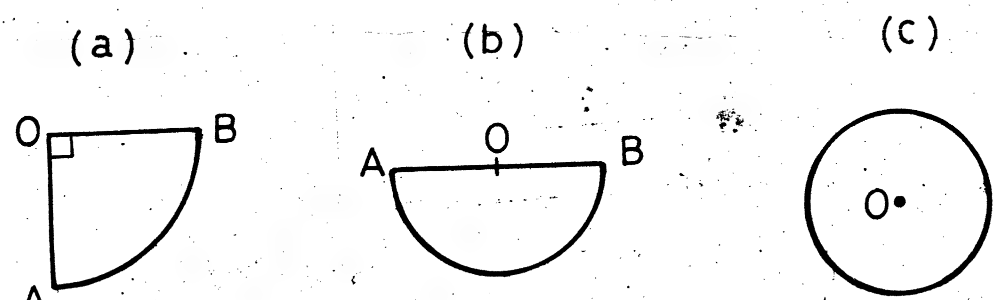
1 - مساحت یک دایره مساوی به ......... شعاع ضرب در π است .

2 - قطریک دایره مساوی به ......... شعاع آن میباشد .

3 - اگرمساحت یک دایره زیاد شود ......... آن زیادمیشود .

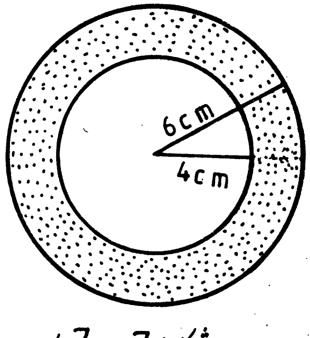
4 - اگرمحیط یک دایره خُرد شود قطرآن ......... میشود .

5 - یک بچه سه توته سیم دارد که طول هریک آنها 99cm است وآنهارا به شکل (6 - 7) درمی آورد درصورتیکه O مرکز دایره است شعاع هرشکل رامحاسبه نمائید .




شکل (6 - 7) .

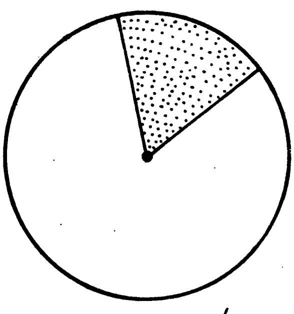
6 - مساحت قسمت مخطط و یا حلقه را دریافت نمائید شکل (7 - 7)




شکل (7 - 7)

## 3 - 7 قطاع دایره :

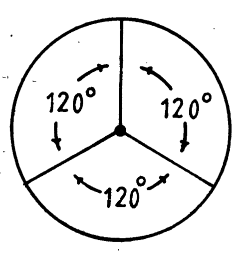
قسمتی از دایره که توسط زاویهٔ مرکزی و قوسی که ذریعه اضلاع زاویه مرکزی قطع گردیده است محدود شده باشد قطاع دایره نامیده میشود شکل (8-7).



شکل (8 - 7)

زاویه مرکزی یک دایره $360^\circ$ است اگر یک دایره را مانند شکل (9-7) به سه حصه مساوی تقسیم نمائیم زاویه هر قسمت مساوی $120^\circ$ میباشد.

میدانید که مساحت هر سه حصه به یکدیگر مساوی اند مساحت هر حصه آن ثلث مساحت کل دایره است اگر مساحت یک حصهٔ دایره را به A نشان دهیم مساحت قطاع




شکل (9 - 7)

$$A = \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi r 2$$

$$A = \frac{1}{3} \pi r 2$$

اگر زاویه مرکزی را به $N^\circ$ نشان دهیم مساحت قطاع دایره عبارت است از :

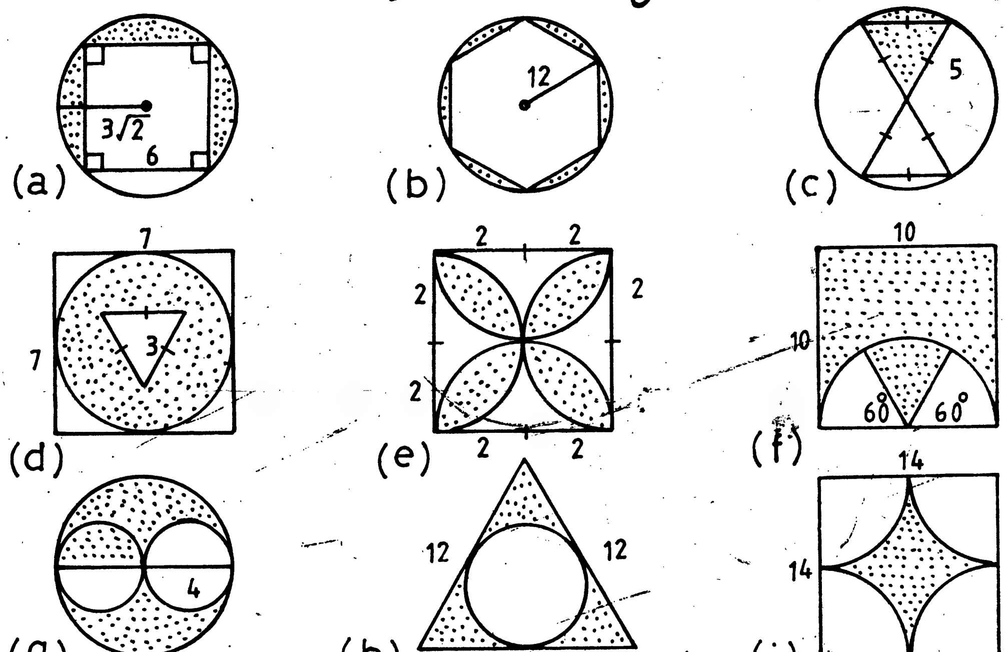
$$A = \frac{N^\circ}{360^\circ} \pi r 2$$

## تمرین 2 - 7 :

1. درجدول ذیل خانه های خالی را پرکنید درصورتیکه A مساحت، c محیط، d قطر و r شعاع دایره باشد.

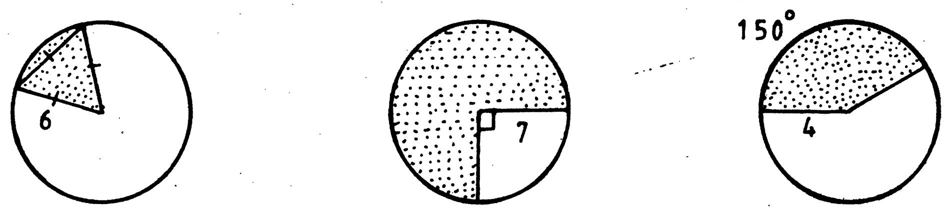
| r | d | c | A |
|---|---|---|---|
| 7 cm | | | |
| | 16 cm | | |
| | | $96\pi$ m | |
| | | $4,8\pi$ cm | |
| | $10\sqrt{2}$ cm | | |
| | | | $48\pi$ cm$^2$ |
| $4\frac{2}{3}$ m | | $20\pi$ m | |
| | | | $25\pi$ m$^2$ |
| | | | $54$ cm$^2 . \pi$ |
| | $6\sqrt{2}$ m | | |
| $11\frac{1}{2}$ cm | | | |

2 - مساحت قسمت های مخطط را در اشکال (7-10) دریافت نمائید




شکل (7-10)

3 ـ مساحت قسمت های مخطط را در اشکال (11-7) دریافت نمائید .

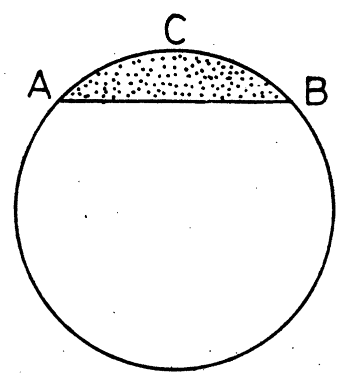



(a) (b) (c)

شکل (11-7)

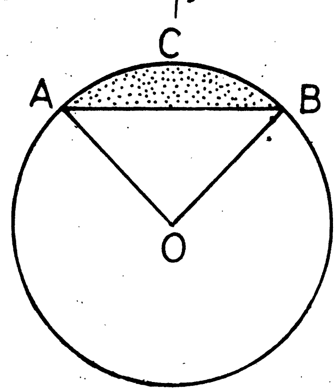
## 4-7 قطعه دایره :

قسمتی از دایره که بین قوس $\overset{\frown}{ABC}$ و وتر $\overline{AB}$ واقع شده باشد قطعه دایره نامیده میشود شکل (12-7).




شکل (12-7)

هرگاه خواسته باشیم مساحت قطعه دایره را دریافت کنیم از مساحت قطاع مربوطه مساحت مثلث متشکله را تفریق میکنیم شکل (13-7).

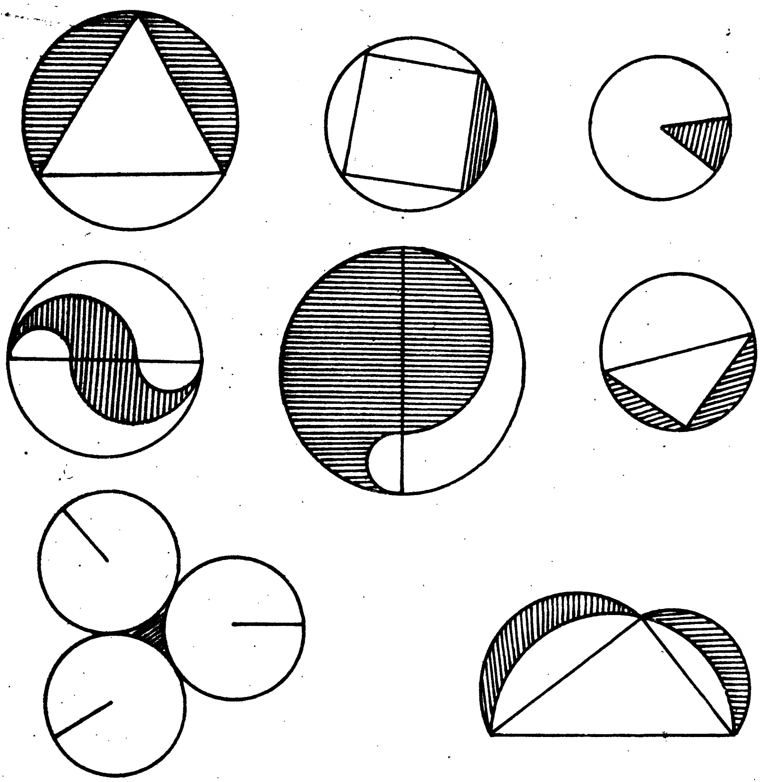



شکل (13-7)

## تمرین :

1 - مساحت قسمتی از دایره راکه شعاع آن 9 cm وزاویهٔ مرکزی آن $40^\circ$ باشد دریافت نمائید .

2 - دراشکال (14-7) مساحت حصص مخطط رامحاسبه نمائید شعاع دوایر وطول اضلاع مثلث ها را توسط خطکش اندازه کنید .



شکل (14- 7)

# تمرینات فصل هفتم

## گروپ اول :

درسوالات ذیل مقابل هرسوال چار جواب داده شده است به اطراف جواب صحیح دایره بکشید .

1 – اگر شعاع یک دایره 10cm باشد محیط آن مساوی است به :

a – $10\pi cm$      b – $20\pi cm$

c – $5\pi cm$      d – هیچکدام

2 – اگر محیط یک دایره $40\pi$ باشد شعاع آن عبارت است از :

a – 20      b – 10

c – 40      d – هرسه جواب درست است .

3 – اگر شعاع یک دایره مساوی به قطر دایرهٔ دیگر باشد، رابطه بین محیط آنها عبارت است از :

a – محیط آنها مساوی است .      b – محیط اولی دوچند محیط دومی .

c – هردو درست است .      d – هردو غلط است .

4 – اگر شعاع یک دایره 5cm باشد مساحت آن عبارت است از :

a – $10\pi cm^2$      b – $25\pi cm^2$

c – $6,25\pi cm^2$      d – هرسه جواب درست است .

## گروپ دوم :

جای های خالی رابا الفاظ مناسب خانه پری نمائید .

1 – خطی که دایره را احاطه نموده است .......... دایره است .

2 – نسبت محیط برقطر دایره عبارت از .......... است .

3 – تمام نقاط داخل دایره از مرکز دایره .......... الفاصله نیست

4 - مساحت دوایریکه شعاع آنها مساوی است .......... است .

5 - مساحت یک دایرهٔ A چهارچند مساحت B است شعاع A ...... چند شعاع B است .

6 - ازدیاد قطر و مساحت یک دایره ارتباط ......... دارد .

## گروپ سوم :

در افادات ذیل مقابل جواب صحیح حرف ( ص ) و در مقابل جواب غلط حرف ( غ ) بنویسید .

( ) 1 - محیط دایره منحنی است که تمام نقاط آن ازمرکز متساوی الفاصله باشد .

( ) 2 - شعاع دایره خطایست که دو نقطهٔ محیط را باهم وصل نماید .

( ) 3 - شعاع دایره خط است که محیط دایره را با مرکز آن وصل میکند .

( ) 4 - شعاع دایره خوردتر از قطر آن است .

( ) 5 - هر دایره محض دارای چار قطر است .

( ) 6 - محیط دایره طویلتر از شعاع آن است .

( ) 7 - مساحت یک دایره مساوی به $\pi r^2$ نیست .

( ) 8 - مساحت یک دایره مساوی به $\frac{D^2\pi}{4}$ است .

( ) 9 - قطاع دایره بخش از دایره را گویند .

( ) 10 - قسمتی از دایره که بین محیط و قطر دایره واقع گردیده باشد قطعهٔ دایره است .

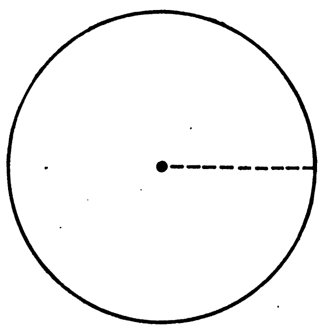
# فصل هشتم

## محل هندسی

### 1 - 8 محل هندسی :

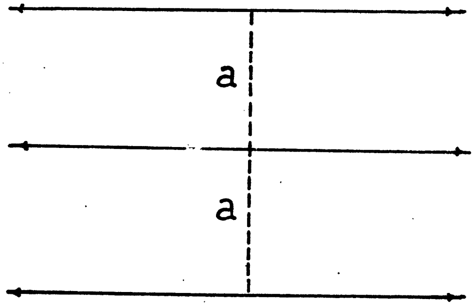
مسیری را که یک نقطه تحت یک شرط (یا شرایط) طی مینماید محل هندسی همان نقطه نامیده میشود.

**مثال** : محل هندسی نقاطی که فاصله آن از یک نقطهٔ معین همیشه ثابت باشد عبارت از یک دایره است که نقطه معین مرکز دایره و فاصلهٔ معین شعاع آن میباشد شکل (1 - 8)



شکل (1 - 8)

2 - 8 محل هندسی نقاطی که از یک مستقیم مفروض دارای یک فاصله داده شده a باشد عبارت از دو مستقیم است که موازی به مستقیم مفروض بوده و از آن دارای فاصلهٔ معین a میباشند. شکل (2 - 8).

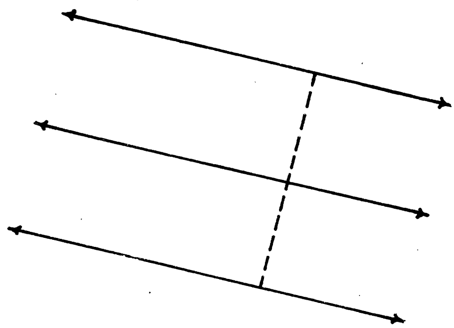



شکل (2 - 8)

3 - 8 محل هندسی نقاطی که از دو مستقیم دارای عین فاصله باشند عبارت از یک مستقیم است که موازی به دو مستقیم مفروض بوده و در وسط آنها طوری قرار دارد که هر نقطهٔ آن از آن دو موازی داده شده دارای عین فاصله میباشد شکل (3 - 8)

4 - 8 قضیه :

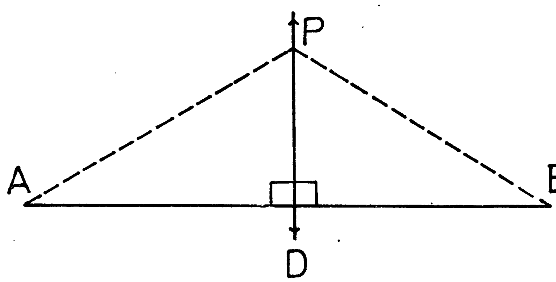
محل هندسی نقاطی که از دوانجام یک قطعه خط دارای فاصله های مساوی (متساوی الفاصله) باشند عبارت از ناصف عمودی همان قطعه خط میباشد.



شکل (3 - 8)

مفروض : درشکل (4-8) نقطه P که از نقاط A و B متساوی الفاصله میباشد.

مطلوب : ثبوت مینمائیم که نقطه P بالای ناصف عمودی $\overline{AB}$ واقع است.




شکل (4-8)

ترسیم : نقطه P را به A و B وصل مینمائیم هم چنان D نقطه وسطی $\overline{AB}$ را به P وصل میکنیم.

دردومثلث PDB و PAD داریم که :

$\overline{PA} = \overline{PB}$ ........ مفروض

$\overline{AD} = \overline{DB}$ ....... نقطه وسطی

$\overline{PD} = \overline{PD}$ ....... مشترک

بناءً مثلث ها ی فوق الذکر انطباق پذیر بوده وچنین نتیجه میشود که :

$$P\hat{D}B \cong P\hat{D}A$$

چون $P\hat{D}B + P\hat{D}A = 180^\circ$ ..... بیک طرف خط مستقیم واقع اند

و یا :

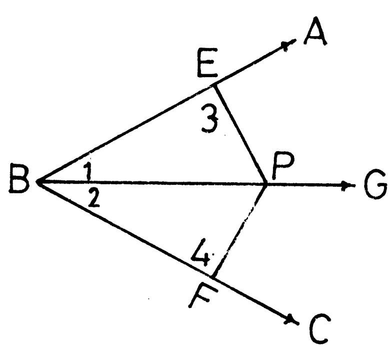
$$P\hat{D}B + P\hat{D}B = 180^\circ$$

$$P\hat{D}B = 90^\circ$$

از اینجا چنین نتیجه میشود $\overline{PD}$ ناصف عمودی $\overline{AB}$ میباشد. چون P یک نقطهٔ است که از نقاط A و B دارای عین فاصله میباشد لذا هر نقطهٔ دیگری که از نقاط B و A دارای عین فاصله باشد نیز بالای ناصف عمودی $\overline{AB}$ یعنی $\overline{PD}$ قرار دارد.

## 5 - 8 قضیه :

محل هندسی نقاط که از دو ضلع یک زاویه متساوی الفاصله باشند عبارت از ناصف همان زاویه است.




شکل (5 - 8)

**مفروض :** در شکل (5 - 8) فرض مینمائیم که P یکی از نقاط است که از اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ متساوی الفاصله است.

**مطلوب :** ثبوت مینمائیم که P بالای ناصف الزاویه $\hat{B}$ واقع است.

**ترسیم :** از نقطهٔ P عمود $\overline{PE}$ و $\overline{PF}$ را بالترتیب بالای اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ رسم نموده و P را به B وصل مینمائیم

**ثبوت :** اکنون در مثلث های قایم الزاویه BEP و BFP داریم که :

$\hat{E} \cong \hat{F}$ ........ هریک قایمه اند

$\overline{PE} = \overline{PF}$ ........ مفروض

$\overline{BP} = \overline{BP}$ ........ درهر دو مثلث مشترک

بنابرآن مثلث های BEP و BFP انطباق پذیر بوده و از اینجا نتیجه میشود که :

$\hat{1} = \hat{2}$ است.

## 9-1 مجموعه وسعت زوایای خارجی یک مضلع :

برای دریافت مجموعه وسعت زوایای خارجی مضلع شکل (16-1) را در نظر گرفته و تنها یکی از زوایای خارجی را در هر رأس مضلع مورد مطالعه قرار میدهیم .

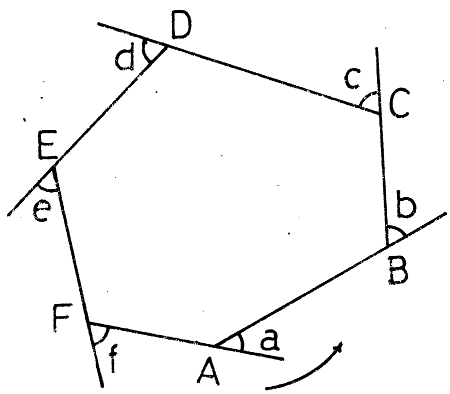
(1) در شکل (16-1) از نقطهٔ A شروع نموده و به طرف B حرکت میکنیم .

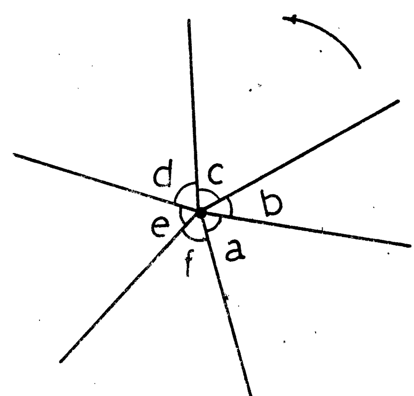
(2) وقتی به B رسیدیم به اندازهٔ زاویه $\hat{b}$ دور میخوریم و بعد به امتداد $\overline{BC}$ به طرف C حرکت میکنیم در نقطه C به اندازهٔ زاویه $\hat{c}$ دور خورده و به طرف نقطه D به امتداد $\overline{CD}$ حرکت می کنیم . به همین ترتیب ادامه میدهیم تا دوباره به نقطهٔ A برسیم .

(3) از نقطهٔ A به اندازه زاویهٔ $\hat{a}$ دور میخوریم خواهیم دید که دوباره بروی نقطه B قرار خواهیم گرفت.

پس دیده میشود که ما یک دور مکمل را تکمیل نموده ایم چون یک دور مکمل دارای $360^\circ$ میباشد. پس:

$$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}+\hat{f} = 360^\circ$$




شکل (16-1)

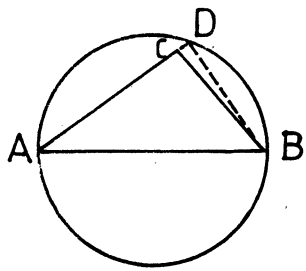
در شکل (16b-1) دیده می شود که اگر از یک نقطه خطوط موازی به اضلاع مضلع رسم نمائیم تعداد زوایای حاصل مساوی به تعداد زوایای خارجی مضلع بوده و مجموعهٔ وسعت آنها $360^\circ$ است .

$\overline{BP}$ ناصف الزاویه B است .

چون P یک نقطهٔ کیفی است که از اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ دارای فاصلهٔ مساوی میباشد بنابرآن هرنقطهٔ دیگر که از اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ متساوی الفاصله باشد بالای ناصف الزاویه $C\hat{B}A$ یعنی بالای $\overline{BD}$ واقع میباشد .

## 6 - 8 قضیه :

محل هندسی رأس قایم یک مثلث قایم الزاویه عبارت از دایره است که از رأس قایم میگذرد وقطر دایره وتر مثلث قایم الزاویه میباشد .




شکل (8 - 6)

**مفروض :** مثلث قایم الزاویه ACB داده شده که وتر آن $\overline{AB}$ است .

**مطلوب :** میخواهیم ثابت نمائیم که C بالای محیط دایره است که قطر آن وتر مثلث قایم الزاویه است شکل (8 - 6)

**ترسیم :** اگر C بالای محیط دایره نباشد $\overline{AC}$ را امتداد میدهیم تا دایره را درنقطه D قطع نماید D را به B وصل مینمائیم .

$A\hat{D}B = 90^\circ$ .......... ترسیم و زاویهٔ مقابل قطر دایره

$\overline{BD} \perp \overline{AC}$ .......... ترسیم

$\overline{BC} \perp \overline{AC}$ .......... مفروض

بناءً $\overline{BD}$ و $\overline{BC}$ باهم دیگر منطبق میباشند زیرا زوایای $\hat{D}$ و $\hat{C}$ مثلث BCD هریک دارای وسعت $90^\circ$ بوده واین ناممکن است زیرا مجموع زوایای داخلی یک مثلث $180^\circ$ است . چون D بالای دایره واقع است پس C هم بالای دایره واقع بوده و با D منطبق میباشد به این ترتیب هرگاه نقطهٔ

D بالای دایرهٔ مذکور حرکت کند در هر حالت قطر AB تحت زاویهٔ $90^\circ$ قرار گرفته و مثلث ABD یک مثلث قایم الزاویه میباشد

## تمرین 1 - 8 :

1 - محل هندسی مراکز دوایری را دریافت نمائید که به یک دایره خارجاً مماس باشد در صورتیکه ،

a - شعاع دایره مماس ثابت است. b - شعاع دایره مماس ثابت نیست .

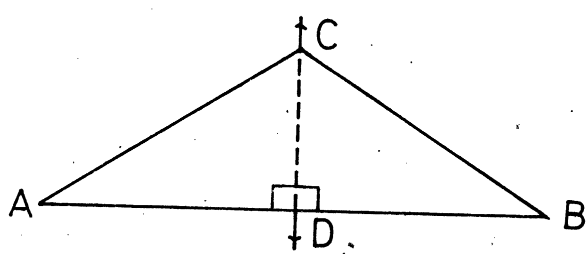
2 - محل هندسی نقاطی را دریابید که از یک نقطهٔ مستقر P بفاصله 8cm قرار دارند

3 - محل هندسی مراکز دوایری را معلوم نمائید که داری شعاع معینه بوده و به یک مستقیم داده شده مماس باشند.

4 - نقطهٔ را دریافت نمائید که از سه نقطه که بالای یک مستقیم واقع نیستند متساوی الفاصله باشد .

5 - محل هندسی مراکز دوایری را دریافت نمائید که با دو ضلع زاویهٔ داده شده مماس باشند .

6 - ثابت نمائید که تمام نقاط $\overline{CD}$ از A و B متساوی الفاصله میباشد شکل (7 - 8)




شکل (7 - 8)

# تمرینات فصل هشتم

## گروپ اول :

در سوالات ذیل مقابل هر سوال چهار جواب داده شده است بدور جواب صحیح دایره بکشید .

1 – محل هندسی نقاطیکه متساوی الفاصله از دو انجام یک قطعه خط باشد عبارت از

a – نقطهٔ تنصیف قطعه خط است

b – ناصف قطعه خط است .

c – ناصف عمودی قطعه خط است

d – دو خط موازی قطعه خط است .

2 – محل هندسی نقاطیکه متساوی الفاصله از اضلاع یک زاویه باشد عبارت از

a – خط است که نقط تنصیف اضلاع زاویه را وصل نماید .

b – ناصف الزاویه زاویهٔ داده شده است

c – دایره است که مرکز آن راس زاویه باشد .

d – زاویه است که اضلاع آن عمود بالای اضلاع داده شده باشد

3 – محل هندسی نقاطیکه متساوی الفاصله از دو خط موازی باشند عبارت از :

a – خطی است که متساوی الفاصله از خطوط مذکور بوده و در بین آنها واقع باشد .

b – خط است که عمود به هر دو خط مذکور باشد .

c – خطی است که موازی به هر دو خط به فاصلهٔ معین باشد .

d – دایره است که مماس به هر دو خط باشد .

4 – محل هندسی نقاطیکه متساوی الفاصله از دو خط متقاطع باشد عبارت از :

a – دایره است که مرکز آن در نقطه تقاطع خطوط مذکور باشد .

b – دو خط است که عمود بر خطوط مذکور باشد

c - دوخط است که ناصف الزاویه زوایای مجاور توسط دوخط متقاطع بوجود آمده باشد.
d - هرسه جواب درست است

5 - محل هندسی نقاطیکه متساوی الفاصله ازیک نقطه ثابت باشد عبارت از:

a - دوخط است که ازنقطهٔ ثابت عبور می نماید.
b - دوایری است که ازنقطهٔ ثابت عبور نموده وشعاع آنها ثابت باشد.
c - دایرهٔ ست که شعاع آن ثابت بوده ومرکز آن نقطهٔ ثابت باشد.
d - مربع است که قطرهای آن درنقطه ثابت تقاطع نماید.

6 - محل هندسی نقاط که متساوی الفاصله از یک خط مستقیم باشد عبارت از:

a - دوخط موازی ومتساوی الفاصله از خط داده شده است.
b - دوایریکه مراکز آنها بالای خط مذکور بوده وشعاع آنها مساوی باشد.
c - خط است که بالای خط مذکور عمود باشد.
d - یک خط موازی به خط داده شده است.

## گروپ دوم:

درسوالات ذیل مقابل سوال صحیح (ص) ودرمقابل غلط (غ) بنویسید

( ) 1 - محل هندسی نقاطیکه از یک خط مستقیم 2 cm فاصله داشته باشد عبارت ازدو خط موازی بوده که هرکدام آ 2cm ازخط مذکور فاصله داشته باشند.

( ) 2 - نقطهٔ که متساوی الفاصله ازسه راس یک مثلث باشد نقطه تقاطع ناصف الزوایای آن است.

( ) 3 - نقطهٔ که متساوی الفاصله ازسه راُس یک مثلث باشد نقطهٔ تقاطع میانه های مثلث است.

(  ) 4 - محل هندسی تمام نقاط که متساوی الفاصله از دو خط موازی باشند خطایست که متساوی الفاصله از هر دو خط باشد .

(  ) 5 - دایرهٔ به شعاع 3cm داده شده است دوایریکه شعاع آنها 5cm است به دایرهٔ مذکور مماس میباشد محل هندسی مراکز دوایر اخیر الذکر عبارت از دایرهٔ است که شعاع آن 8cm باشد .

(  ) 6 - دو دایرهٔ ( O ) و ( O′ ) در نقطهٔ P مماس اند محل هندسی دوایریکه مماس به هر دو دایره باشند عبارت از مماس مشترک آنها در نقطهٔ P است .

(  ) 7 - اگر دوایر متحد المرکز باشد دایرهٔ رسم شده نه میتواند که به هر دو دایره مماس باشد :

## گروپ سوم :

درسوالات ذیل جاهای خالی را باالفاظ مناسب تکمیل نمائید .

1 - محل هندسی تمام نقاطیکه 2 m از نقطهٔ C فاصله داشته باشند ........... است .

2 - محل هندسی نقطه تنصیف وترهای موازی یک دایره عبارت از .......... است .

3 - نقطهٔ تنصیف تمام شعاعات یک دایره C بالای یک ......... واقع است .

4 - محل هندسی مراکز دوایریکه شعاع آن 11cm بوده وازنقطهٔ ثابت C میگذرد یک ..... است .

5 - محل هندسی دوایریکه دارای شعاع مساوی بوده داخلاً به یک دایره مماس باشد عبارت از ..
......... است .

6 - محل هندسی رأس یک مثلث قایم الزاویه عبارت از دایره ایست که شعاع آن نصف ...... مثلث باشد .

7 - محل هندسی مراکز دوایریکه بدوخط موازی مماس باشند عبارت از یک ........ به خطوط مذکور است .

## گروپ چهارم :

1- محل هندسی مرکز دوایری را دریافت نمائید که با دوائر متحدالمرکز که شعاع آنها 2cm و 4cm باشد مماس میباشد .

2- دائرهٔ که مرکز آن O وشعاع آن r است داده شده است محل هندسی نقاط راکه داخل دایره بوده وفاصلهٔ آن ازمرکز دایره $\frac{r}{2}$ باشد دریافت نمائید .

3- دایرهٔ که مرکز آن O است داده شده محل هندسی نقاط تنصیف تمام وترهای را دریافت نمائید که از یک نقطهٔ ثابت X داخل دایره بگذرد .

4- قطعه خط AB قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین است محل هندسی رأس مثلث متساوی الساقین مذکور را دریافت نمائید .

5- نقطه A بالای مستقیم l واقع است محل هندسی مرکز تمام دوایری را دریافت نمائید که در نقطه A به خط l مماس باشد .

6- دایرهٔ که مرکز آن O وشعاع آن r است داده شده است دایرهٔ دیگری که شعاع آن t $(t < r)$ است با دایرهٔ O داخلاً مماس است محل هندسی مرکز دایره متحرک را دریافت نمائید .

7- سیر انجام عقربه دقیقه گرد ساعت رادریافت نمائید درصورتیکه ساعت گرد ساعت از 9 بجه به 10 بجه حرکت کند .

تعداد طبع (۳،۰۰۰)　　طبع دوم　　سال طبع ۱۳۷۱

مطبعہ افضل شریف پرنٹرز لاہور

## مآخذ REFERENCES


۱ - ضیائی عبدالعظیم هندسه صنف نهم کابل افغانستان ۱۳۵۵ هـ ش

۲ - وزارت آموزش و پرورش هندسه سال اول آموزش متوسط . تهران جمهوری اسلامی ایران . ۱۳۶۵ هـ ش

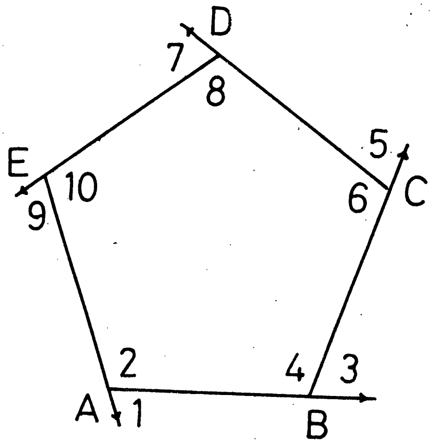
3. Moise E. Edwin Geometry. California: Addision-Wesley Publishing Company, 1982.

4. Banks Houston J. Geometry Its Elements and Structure. New York: McGraw-Hill Book Company, 1972.

5. Goodwin Wilson A. Geometry. Ohio; U.S.A.: Charles E. Merrill Publishing Co. 1970.

6. Yanker. Cummins. Foster Geometry. Tornto: Merrill Publishing Company, 1987.

1-9-1 قضیه :- مجموعهٔ وسعت زوایای خارجی هر مضلع مساوی به $360^\circ$ است.




شکل (1-17)

**معروض :** مضلع ABCDE داده شده که زوایای خارجی آن $\hat{1}$ ، $\hat{3}$ ، $\hat{5}$ ، $\hat{7}$ و $\hat{9}$ میباشد.

**مطلوب :** میخواهیم ثابت نمائیم که $\hat{1}+\hat{3}+\hat{5}+\hat{7}+\hat{9}=360^\circ$

**ترسیم :** اضلاع مضلع را مطابق شکل (1-17) امتداد میدهیم.

**ثبوت :** ما داریم :

$$\left.\begin{aligned}\hat{1}+\hat{2}&=180^\circ\\ \hat{3}+\hat{4}&=180^\circ\\ \hat{5}+\hat{6}&=180^\circ\\ \hat{7}+\hat{8}&=180^\circ\\ \hat{9}+\hat{10}&=180^\circ\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

در مبحث گذشته دریافت نمودیم که :

$$2+4+6+8+10=(n-2)\,180\cdots\cdots\cdots(2)$$

از رابطهٔ ( 1 ) چنین می نویسیم :

$$\left.\begin{aligned}\hat{1} &= 180^\circ - \hat{2}\\ \hat{3} &= 180^\circ - \hat{4}\\ \hat{5} &= 180^\circ - \hat{6}\\ \hat{7} &= 180^\circ - \hat{8}\\ \hat{9} &= 180^\circ - \hat{10}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

رابطهٔ ( 3 ) را طرف به طرف جمع میکنیم .

$$\hat{1}+\hat{3}+\hat{5}+\hat{7}+\hat{9} = 180^\circ - \hat{2} + 180^\circ - \hat{4} + 180^\circ - \hat{6} + 180^\circ - \hat{8} + 180^\circ - \hat{10}$$

$$= 5(180^\circ) - (\hat{2}+\hat{4}+\hat{6}+\hat{8}+\hat{10}) \cdots\cdots\cdots (4)$$

چون شکل ( 17-1 ) یک مضلع پنج ضلعی است یعنی $n = 5$ است .

پس رابطه ( 4 ) را میتوانیم چنین نمایش دهیم :

$$\hat{1}+\hat{3}+\hat{5}+\hat{7}+\hat{9} = n(180^\circ) - (\hat{2}+\hat{4}+\hat{6}+\hat{8}+\hat{10}) \cdots\cdots\cdots (5)$$

قیمت زوایای داخلی را از رابطهٔ ( 2 ) در رابطهٔ ( 5 ) وضع میکنیم .

$$\begin{aligned}\hat{1}+\hat{3}+\hat{5}+\hat{7}+\hat{9} &= n(180^\circ) - \left[(n-2)180^\circ\right]\\ &= n(180^\circ) - (n-2)180^\circ\\ &= 180^\circ(n-n+2)\\ &= 360^\circ \cdots\cdots\cdots\cdots (6)\end{aligned}$$

رابطه ( 6 ) نشان میدهد که مجموعه زوایای خارجی یک مضلع مساوی به $360^\circ$ است .

## تمرین 3-1 :

1 ــ وسعت زوایای خارجی یک مضلع منظم 9 ضلعی را دریافت نمائید .

2 ــ وسعت چهار زاویهٔ داخلی یک پنج ضلعی عبارت است از $40^\circ$ ، $75^\circ$ ، $130^\circ$ و $135^\circ$ وسعت

زاویهٔ پنجم رابدست آرید .

3 - مجموعه وسعت زوایای داخلی کدام مضلع $1440^\circ$ است .

4 - اگر دو مضلع دارای تعداد اضلاع مساوی باشد آیا تعداد زوایای آنها باهم مساوی است ؟

## 10-1 دریافت اندازه هریک اززوایای داخلی مضلع منظم درصورتیکه تعداد اضلاع آن معلوم باشد :

درمبحث ( 8-1 ) مطالعه نمودیم که مجموعهٔ وسعت زوایای داخلی یک مضلع $180^\circ(n-2)$ میباشد.

درمضلع منظم n نمایندگی ازتعداد اضلاع مساوی رامی نماید . اگر وسعت یک زاویه یک مضلع منظم n ضلعی D درجه باشد . پس نوشته کرده میتوانیم :

$$nD = (n-2)\,180^\circ$$

$$D = \frac{(n-2)}{n}\,180^\circ$$

**مثال :** یک مخمس منظم داده شده مجموعه وسعت زوایای داخلی و وسعت هر زاویهٔ آن را معلوم کنید .

**حل :** چون $n = 5$ است ومجموعه وسعت زوایای داخلی مساوی به nD است ؛

$$nD = (n-2)\;180^\circ$$

$$= (5-2)\;180^\circ$$

$$= 540^\circ$$

وسعت هرزاویه داخلی مخمس منظم عبارت است از :

$$D = \frac{(n-2)}{n}\;180^\circ$$

$$= \frac{(5-2)}{5} = 108$$

## 11-1 دریافت تعداد اضلاع یک مضلع منظم نظر به زاویهٔ آن :

به اساس (8-1) مجموعهٔ وسعت زوایای داخلی یک مضلع منظم $180^\circ(n-2)$ است. اگر مجموعه وسعت زوایای داخلی را به $nD$ و وسعت هر زاویه را به $D$ ارائه کنیم پس داریم که :

$$nD = (n-2)\,180^\circ \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$nD = 180^\circ n - 360^\circ$$ ویا

$$n(180^\circ - D) = 360^\circ$$ ویا

$$n = \frac{360^\circ}{180^\circ - D}$$

**مثال اول :** مجموعه وسعت زوایای داخلی یک مضلع منظم $2700^\circ$ داده شده تعداد اضلاع مضلع را دریافت کنید.

**حل :**

$$nD = (n-2)\,180^\circ$$

$$2700^\circ = (n-2)\,180^\circ$$

$$n - 2 = \frac{2700^\circ}{180^\circ}$$

$$n = 17$$

مضلع مذکور دارای 17 ضلع میباشد .

**مثال دوم :** وسعت یک زاویه یک مضلع منظم $120^\circ$ داده شده تعداد اضلاع مضلع را معلوم کنید.

$$n = \frac{360^\circ}{180-D}$$

چون $D = 120^\circ$ است پس :

$$n = \frac{360^\circ}{180^\circ - 120}$$

$$n = \frac{360^\circ}{60^\circ}$$

$$n = 6$$

مضلع مذکور یک مضلع منظم شش ضلعی است .

# تمرینات فصل اول

## گروپ اول :

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر نمائید .

۱ - اگر وسعت یک زاویه خارجی یک مضلع منظم دوچند وسعت زاویه داخلی مربوطه آن باشد مضلع مذکور ............ نامیده میشود .

2 - با تزاید اضلاع یک مضلع منظم ، وسعت زاویهٔ داخلی مضلع ....... و وسعت زاویهٔ خارجی آن ......... نه میکند .

3 - زاویهٔ خارجی یک مضلع ............. زاویه داخلی مجاور آن است .

4 - از یک رأس هشت ضلعی .......... قطر رسم شده میتواند .

5 - اگر وسعت یک زاویه خارجی یک مضلع منظم $12^{\circ}$ باشد مضلع مذکور دارای ...... ضلع میباشد

6 - مضلع مقعر ........... مضلع محدب شده نمیتواند .

7 - اگر مجموع وسعت زوایای داخلی یک مضلع مساوی به مجموع وسعت زوایای خارجی همان مضلع باشد مضلع مذکور دارای ....... ضلع است .

8 - یک مثلث متساوی الاضلاع و یک مربع بنام ........... منظم یاد می شود .

9 - مستقیمی که دو رأس غیر مجاور یک مضلع را باهم وصل کند ....... نامیده میشود .

10 - اگر اندازهٔ هریک از زوایای داخلی یک مضلع متساوی الزوایا $144^{\circ}$ باشد مضلع مذکور دارای .... ضلع میباشد .

## گروپ دوم :

درمقابل سوال صحیح (ص) و درمقابل سوال غلط (غ) بگذارید .

(   ) 1 - بزرگترین زاویه خارجی ایکه ازامتداد یک ضلع یک مضلع منتظم ساخته میشود $120^\circ$ است .

(   ) 2 - مثلث میتواند یک مضلع مقعر باشد .

(   ) 3 - وسعت یک زاویهٔ خارجی یک مضلع سه ضلعی ، هیچگاه کمتر از وسعت یک زاویهٔ داخلی آن نمیباشد .

(   ) 4 - دو ضلع غیر مجاور یک مضلع در یکی از رأس های مضلع مذکور باهم متقاطع اند .

(   ) 5 - یک مضلع را وقتی متساوی الزوایا گویند که تمام اضلاع آن باهم مساوی باشند .

(   ) 6 - مجموعه وسعت زوایای خارجی یک مضلع منتظم عبارت از $180^\circ(n-2)$ است .

(   ) 7 - مضلع منظم عبارت از مضلع است که تمام اضلاع آن انطباق پذیر باشد .

(   ) 8 - مضلع ایکه تمام اضلاع آن باهم انطباق پذیر باشد بنام مضلع محدب یاد میگردد .

(   ) 9 - دریک مضلع منتظم n ضلعی ، وسعت یک زاویه آن $\frac{(2n-4)}{n}$ قایمه میباشد .

(   ) 10 - اگر وسعت یک زاویهٔ مضلع منتظم $60^\circ$ باشد ،مضلع مذکوررا مثلث متساوی الاضلاع گویند .

(   ) 11 - اگر تعداد اضلاع یک مضلع تزاید نماید آیا مجموع زوایای خارجی آن تزاید مینماید ؟

## گروپ سوم :

درمقابل هرسوال چهار جواب داده شده است .شما جواب صحیح را حلقه نمائید .

١ - مجموعه وسعت زوایای داخلی یک مضلع 9 ضلعی :

(a) $1259^\circ\ 00'\ 60''$ است .    (b) $1259^\circ\ 59'\ 59''$ است .

(c) $1259^\circ\ 60'\ 00''$ است .    (d) هیچکدام .

2 - مجموعهٔ وسعت زوایای داخلی یک مضلع $1980^\circ$ داده شده مضلع مذکور دارای :

a ) 18 ضلع است . b ) 13 ضلع است .

c ) 11 ضلع است d ) 17 ضلع است .

3 - اگر سه قطعه خط دریک نقطه یکدیگر خود را قطع کند مجموعهٔ وسعت زوایای که در نقطهٔ تقاطع تشکیل میشود :

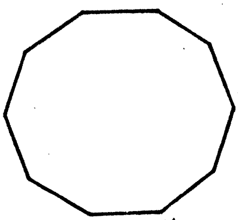
a ) $260^\circ$ است b ) $360^\circ 60'$ است

c ) $359^\circ 60'$ d ) هیچکدام .

4 - اگر وسعت یک زاویه داخلی یک مضلع منظم $144^\circ$ باشد تعداد اضلاع آن :

a ) 8 است b ) 9 است

c ) 10 است d ) 12 است



شکل ( 1-18 )

5 - شکل ( 1-18 ) رامیتوان چنین نامگذاری کرد :

a ) مضلع منظم محدب 10 ضلعی است b ) مضلع منظم مقعر 10 ضلعی است .

c ) مضلع منظم محدب 10 ضلعی نیست d ) مضلع منظم مقعر 10 ضلعی نیست

6 - کدام یکی از اجزاء ذیل خواص تمام مستطیل ها نمیباشد .

a ) زوایای متقابل انطباق پذیر اند . b ) اقطار آن انطباق پذیر اند .

c ) اقطار آن بروی یکدیگر عمود اند . d ) اقطار آن یکدیگر را تنصیف میکنند .

## گروپ چهارم :

سوال های ذیل را حل نمائید .

۱ - مضلعات منظم را نام گیرید که هر یک از زوایای داخلی آن $135^\circ$ ، $120^\circ$ و $144^\circ$ باشد .

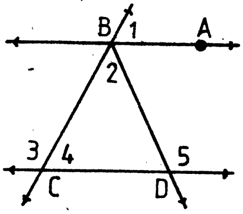
2 - تعداد اضلاع مضلعات منظم را دریافت نمائید. درصورتیکه زوایای خارجی هر کدام $30^\circ$، $40^\circ$ و $45^\circ$ باشد.

3 - مجموعهٔ یکی از زوایای داخلی و زاویه خارجی مجاور آن در یک مضلع چند درجه است.

4 - فارمولی را جهت دریافت تعداد قطرهای یک مضلع که دارای $n$ ضلع باشد دریافت نمائید.

5 - اگر وسعت یک زاویه خارجی یک مضلع منظم دو چند وسعت زاویه داخلی مجاور آن باشد. مضلع را نام گیرید.

6 - کلانترین زاویه خارجی را کدام یکی از مضلعات منظم دارا است و در صورت مضلعات غیر منظم قضیه چطور است.



شکل (1-19)

7 - درشکل (1-19) قاطع $\overline{BC}$ خطوط موازی $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ را قطع نموده درحالیکه $\overline{BD}$ ناصف $A\hat{B}C$ بوده و $\hat{1} = 72^\circ$ است وسعت زوایای $\hat{2}$، $\hat{3}$، $\hat{4}$ و $\hat{5}$ را دریافت نمائید.

8- مضلع CDEFG داده شده اگر $\hat{C} = 150^\circ$، $\hat{D} = 60^\circ$، $\hat{E} = \hat{G}$ و $\hat{F} = \frac{3}{4}\hat{G}$ باشد.

(a) وسعت زوایای $\hat{E}$، $\hat{F}$ و $\hat{G}$ را دریافت نمائید.

(b) مضلع را رسم نمائید و بگوئید چرا $CD \parallel EF$ است؟

9- یک مضلع را رسم نمائید که تمام اضلاع آن انطباق پذیر و تمام زوایای آن قائمه بوده ولی مضلع منظم نباشد.

10- درشکل (1-20) زاویه $x$ را ازجنس $a$ دریافت نمائید.

# فصل اول

## مضلع (POLYGON)

### 1-1 مضلع :

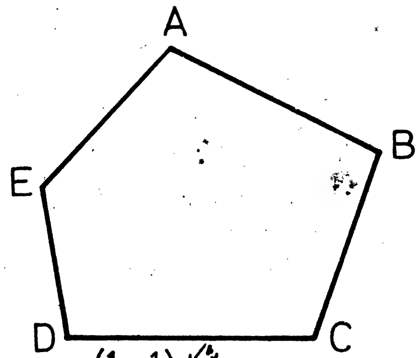
از اتحاد سه ویا چندین قطعه خط شکلی تشکیل میگردد که مضلع نامیده میشود و قطعه خط های مذکور را اضلاع مضلع می نامند طوریکه :

(1) هر قطعه خط دو قطعه خط دیگر را محض در انجام های آن قطع میکند که نقاط تقاطع بنام رأس های مضلع یاد میشود .

(2) هر رأس مضلع فقط وفقط نقطه تقاطع دو قطعه خط است .

(3) دو خط متقاطع هیچگاه به امتداد عین خط واقع نمیباشد .

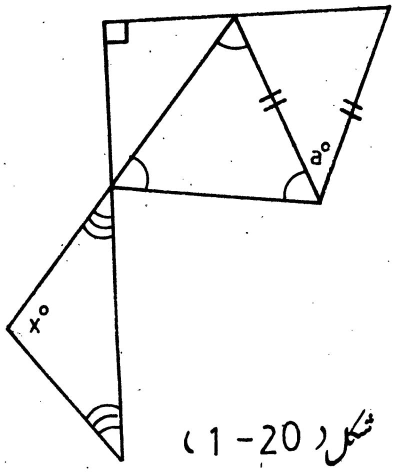
هر مضلع توسط حروف رأس های آن نمایش داده میشود مانند مضلع ABCDE شکل (1-1)




شکل (1-1)

مضلع را بطور خلاصه چنین تعریف میکنند : مضلع شکل بسته است که توسط چند قطعه خط تشکیل شده باشد.

۱۱ - با استفاده از یک دایره یک پنج ضلعی منظم یک شش ضلعی منظم و یک هشت ضلعی منظم را بدقت توسط پنسل های رنگه (برای هر ضلع یک رنگ استعمال گردد) رسم نمائید شکل را که تشکیل خواهد گردید چه نام خواهید گذاشت .




شکل ( 20- 1 )

# فصل دوم

## 2-1 نسبت :

مقایسهٔ مقادیر هم جنس جزء کار روزمره ما و شما است چنانچه ما و شما معاشات ، موترها ، وزنها ، تجارب ، میزها و غیره را باهم مقایسه میکنیم مثلاً اگر وزن یک شخص 80 kg و از شخص دیگر 60 kg باشد نسبت وزن شخص اول بر شخص دوم عبارت است از :

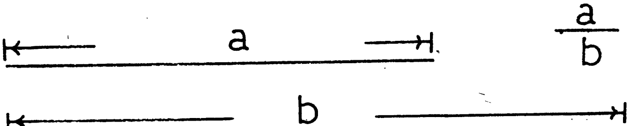
$$\frac{80}{60} = \frac{4}{3}$$

و هم نسبت بیست و پنج پول بر یک افغانی عبارت از

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$ است

**تعین رابطه بین دو مقدار هم جنس را نسبت گویند :**

اگر a و b طول دو خط باشد نسبت a و b را ذیلاً ارایه می نمایند شکل (1 - 2)



1 - توسط استعمال خط بر ( — ) و یا $\frac{a}{b}$

2 - توسط علامه ( : ) و یا a : b

شکل (1 - 2)

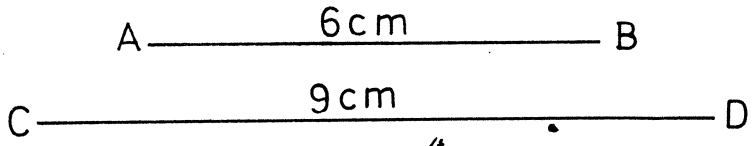
### تمرین 1 - 2 :

1 - اگر طول یک قطعه خط 7cm و طول خط دیگری 21cm باشد نسبت قطعه خط اولی بر خط دومی را دریافت نمائید .

2 - نسبت طول دو قطعه خط را دریافت نمائید که طول آنها بالترتیب 3m و 18 m باشد .

3 - خطوط مستقیم به طول 2x و 3x داده شده است نسبت آنها را دریافت نمائید .

4 - شکل (2-2) را درنظر گرفته سوالات ذیل را جواب دهید .




شکل (2-2)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = ?$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = ?$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = ?$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CD}} = ?$$

## 2-2. تناسب :

مساوات دونسبت را تناسب نامند یعنی مساوات $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را تناسب می نامند .

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

تناسب یک معادله است و تمام مقررات معادله بالای آن تطبیق میشود . در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ویا ($a \div b = c \div d$) حرف a راحد اول ، b راحد دوم ، c راحد سوم و d راحد چارم نامند علاوتاً a و d را طرفین و b و c را وسطین می نامند.

## تمرین 2-2 :

1 - علامه $=$ ویا $\neq$ را درجای مناسب آن بنویسید

a - $\frac{3}{5}$ ○ $\frac{12}{10}$  b - $\frac{3}{7}$ ○ $\frac{15}{75}$

c - $\frac{1}{x}$ ○ $\frac{6}{6x}$  d - $\frac{12}{11}$ ○ $\frac{84}{88}$

e - $\frac{8}{9} \bigcirc \frac{4}{3}$ f - $\frac{xy}{y^2} \bigcirc \frac{x}{y}$

2 - قیمت x را در تناسب های ذیل دریافت نمائید .

a - $\frac{x}{6} = \frac{4}{3}$ b - $\frac{x}{5-x} = \frac{7}{8}$

c - $\frac{21-x}{x} = \frac{1}{2}$ d - $\frac{3x+2}{5} = \frac{x-4}{4}$

3 - حد دوم ، سوم و چارم سوال دوم جزء d را بگوئید که چند است .

4- در سوالات ذیل نسبت $\frac{x}{y}$ و $\frac{y}{x}$ را دریافت نمائید .

a - $3x = 4y$ b - $5x = 6y$ c - $ax = by$

d - $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2}$ e - $ax+bx=cy+dy$ f - $ax+by=cx+dy$

5 - در تناسب های ذیل قیمت x را دریافت نمائید .

a - $\frac{2}{x} = \frac{3}{7}$ b - $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ c - $\frac{x-5}{x+3} = \frac{1}{3}$

d - $\frac{a+x}{x} = \frac{b}{c}$ e - $\frac{a+b}{b} = \frac{a+x}{x}$ f - $\frac{3x-2a}{2x} = \frac{2b}{3a}$

### 3-2 وسط تناسب :

مقادیر a ، b و c زمانی تناسب سوم را تشکیل میدهند که اگر نسبت بین a و b مساوی به نسبت b و c باشد یعنی

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

و یا

$$a:b = b:c$$

در تناسب فوق b را وسط تناسب بین a و c می نامند .

## 4-2 اصول تناسب :

1 – هرگاه دو و یا چند نسبت به یک نسبت معینه مساوی باشند آنها باهم مساوی اند

**مثال :** اگر $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ و $\frac{x}{y}=\frac{c}{d}$ باشد

پس $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ است

2 – هرگاه مخرج های دو نسبت مساوی باهم مساوی باشند صورت های آنها نیز باهم مساوی است.

**مثال :** اگر $\frac{b}{x}=\frac{a}{x}$ باشد

پس $a = b$ است

## 5-2 خواص تناسب :

I – اگر $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ باشد

پس $ad = bc$ میباشد

II – اگر $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ باشد

پس $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$ میباشد

III – اگر $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ باشد

پس $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ میباشد

IV – اگر $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ باشد

پس $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ میباشد

V – اگر $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ باشد

پس $\frac{c+d}{d}=\frac{a+b}{b}$ میباشد

VI – اگر $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ باشد

پس $\frac{c-d}{d}=\frac{a-b}{b}$ میباشد

## نتایج :

I- اگر $\frac{c+d}{d}=\frac{a+b}{b}$ باشد

پس $\frac{d}{c+d}=\frac{b}{a+b}$ میباشد

II- اگر $\frac{c-d}{d}=\frac{a-b}{b}$ باشد

پس $\frac{d}{c-d}=\frac{b}{a-b}$ میباشد

III- اگر $\frac{c+d}{d}=\frac{a+b}{b}$ و $\frac{c-d}{d}=\frac{a-b}{b}$ باشد

پس $\frac{c+d}{c-d}=\frac{a+b}{a-b}$ میباشد

IV- اگر $\frac{x}{y}=\cdots\cdots=\frac{e}{f}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ باشد

پس $\frac{x}{y}=\cdots\cdots=\frac{e}{f}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}=\frac{a+c+e+\cdots+x}{b+d+f+\cdots+y}$ است

## تمرین 3-2 :

1 - ازمساوات های ذیل نسبت $\frac{x}{y}$ و $\frac{y}{x}$ رادریافت نمائید .

a: $2x=3y$ b: $7x=5y$ c: $ax=by$

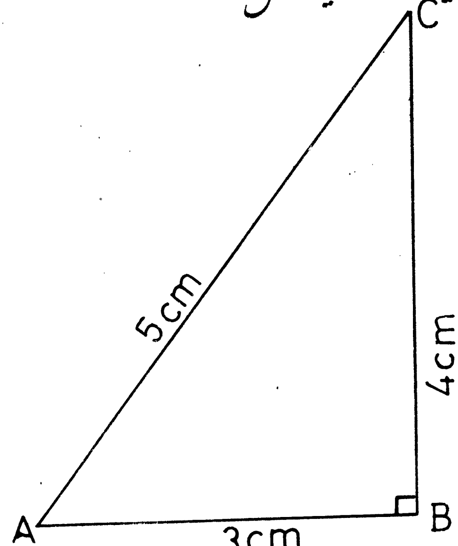
d: $8y=x$ e: $(m+n)x=ay$ f: $ax-bx=cy-dy$

2- وسط تناسب رابین دوعدد داده شده ذیل دریافت کنید

a - 8 , 2 b - 1 , 25 c - $4a^2, 4b^2$

d - 3 , 2 e - 2 , 3 f - 25 , 1

3 - درمثلث ABC نسبت های ذیل را دریافت نمائید شکل (2 - 3)




I- $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

II- $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

III- $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

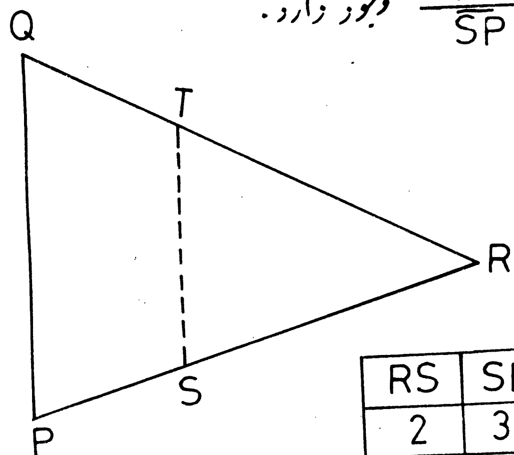
IV- $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

V- $\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}$

VI- $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}}$

شکل (2-3)

4 - مطابق شکل (2 - 4) جدول داده شده را تکمیل کنید درصورتیکه $\frac{\overline{RT}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{SP}}$ وجود دارد.




شکل (2-4)

| RS | SP | RP | RT | TQ | RQ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | | 4 | | | -I |
| | 45 | | 32 | 40 | | -II |
| | | 3 | 16 | | 24 | -III |
| | | 36 | 36 | 48 | | -IV |

5 - طول یک خط مستقیم 25cm است توسط نقطه M به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم شده است طول هر بخش را مقایسه نمائید

## 2-6 تقسیم به نسبت واجزای متناسبه:

**مثال:** قطعه خط $\overline{AB}$ راکه طول آن 28cm است توسط نقطهٔ M داخلاً به نسبت 3 بر 4 تقسیم نمائید.

**حل:** قرار ذیل عمل میکنیم.

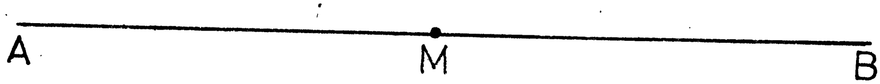
1 - حاصل جمع 3 و 4 را دریافت میکنیم ( $7 = 4 + 3$ ) که مساوی به 7 میشود.

2 - طول AB راکه 28cm است به 7 تقسیم میکنیم ( $28 \div 7 = 4\ cm$ )

3 - هریک از اجزای متناسبه را به 4cm ضرب میکنیم:

$$MB = 4cm \times 4 = 16\ m$$

$$AM = 4cm \times 3 = 12\ cm$$




شکل (2 - 5)

ویا میتوانید عملیه را قرار ذیل انجام نمائید.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{3}{4}$$

قرار خواص V متناسب میتوانید بنویسید.

$$\frac{\overline{AM} + \overline{MB}}{\overline{MB}} = \frac{3+4}{4}$$

اگر شکل (2 - 5) را ملاحظه نمائید $AM + MB = AB$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \frac{7}{4}$$

ویا:

$$\frac{28cm}{\overline{MB}} = \frac{7}{4}$$

$$7\overline{MB} = 4 \times 28\,cm$$

$$\frac{7\overline{MB}}{7} = \frac{4 \times 28cm}{7}$$

$$\overline{MB} = 16\,cm$$

$$\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{MB}$$

$$\overline{AM} = 28cm - 16\,cm$$

$$\overline{AM} = 12\,cm$$

برای تقسیم نمودن یک عدد به نسبت های داده شده ذیلاً عمل میکنیم :

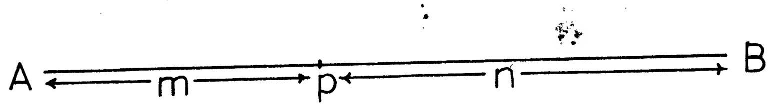
اولاً مجموع نسبت های داده شده را بدست می آوریم . ثانیاً عدد داده شده ویا طول داده شده را به این مجموعه تقسیم می نمائیم خارج قسمت که بدست میآید ضرب هریک از اعداد نسبت های داده شده میکنیم خارج قسمت اعدادی حاصل شدهٔ فوق را تقسیم به اجزای متناسبه ویا تقسیم به نسبت ها می نامند.

## 2- یک قطعه خط محض توسط یک نقطه داخلاً ویا خارجاً به یک نسبت معینه تقسیم شده میتواند :

### 1-7-2 حالت اول :

قطعه خط $\overline{AB}$ را داخلاً به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می نمائیم درصورت که $n \neq 0$ ، است شکل (6-2) .

**مفروض :** قطعه خط $\overline{AB}$ توسط نقطه P داخلاً به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم گردیده است :




شکل (6 - 2)

**مطلوب :** میخواهیم ثبوت نمائیم که P یگانه نقطهٔ است که قطعه خط AB را داخلاً به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم میکند.

**ثبوت :** فرضاً Q نقطه دیگری است که قطعه خط $\overline{AB}$ را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم نموده است :

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{m}{n} \quad \cdots\cdots \quad I$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n} \quad \cdots\cdots \quad II \qquad \text{قرار مفروض}$$

از مقایسهٔ I و II چنین نتیجه می شود که :

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}$$

$$\frac{\overline{AP}+\overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}+\overline{QB}}{\overline{QB}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QB}}$$

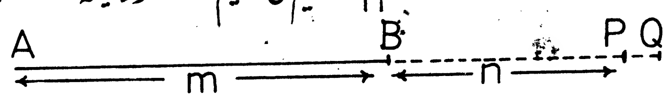
چون صورت ها باهم مساوی است پس :

$$\overline{PB} = \overline{QB}$$

رابطهٔ اخیر الذکر زمانی درست است که نقاط P و Q باهم منطبق باشند پس P یگانه نقطهٔ است که قطعه خط $\overline{AB}$ را به نسبت $\frac{m}{n}$ داخلاً تقسیم می نماید .

**2-7-2 حالت دوم :**

قطعه خط $\overline{AB}$ را خارجاً به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می نمائیم در صورتیکه ( $n\neq 0$ ) است شکل (2-7)




شکل (2 - 7)

**مفروض :** قطعه خط $\overline{AB}$ توسط نقطه P خارجاً به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم گردیده یعنی :

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n}$$

مانند مثلث، چهارضلعی، مخمس (پنج ضلعی)، مسدس (شش ضلعی) وغیره.
مضلعات را ازحیث تعداد اضلاع چنین طبقه بندی میکنند.

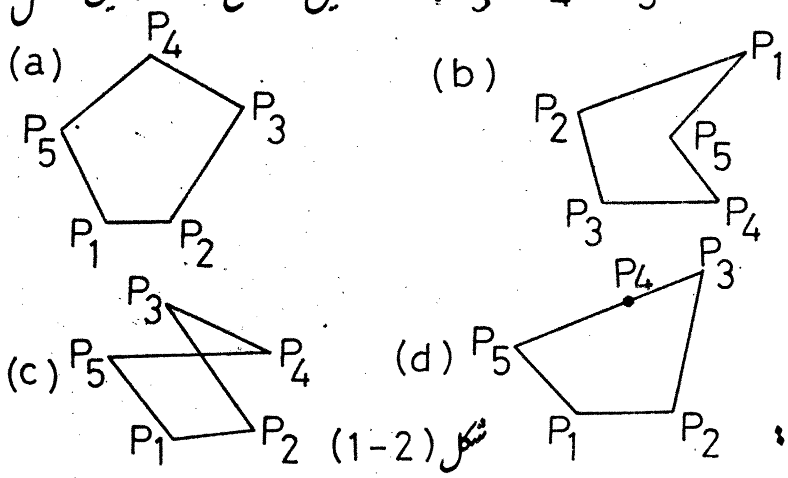
سه ضلعی، چهارضلعی، پنج ضلعی (مخمس)، شش ضلعی (مسدس)، هفت ضلعی، هشت ضلعی وغیره.

**مثال:** مضلعات شکل (1-2) را مشاهده نمائید.

(1) به اساس شرایط فوق، اشکال (1-2a) و (1-2b) مضلعات اند.

(2) شکل (1-2c) مضلع نیست زیرا خطوط $\overline{P_2 P_3}$ و $\overline{P_4 P_5}$ درنقطه انجام یکدیگر را قطع نکرده اند

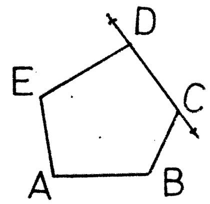
(3) در شکل (1-2d)، نقاط $P_3$، $P_4$ و $P_5$ به امتداد عین خط واقع اند. لذا این شکل یک مضلع نیست.




شکل (1-2)

## 1-2. اقسام مضلع:

**1-2-1 مضلع محدب:** مضلع را وقتی مضلع محدب گویند که هیچ دو نقطهٔ آن بدو طرف یک ضلع آن واقع نباشد. در شکل (1-3)، اگر هر ضلع آن امتداد یابد هیچگاه دو نقطهٔ مضلع مذکور بدو طرف ضلع امتداد یافته واقع نمیگردد.




شکل (1-3)

**مطلوب** : میخواهیم ثبوت نمائیم که P یگانه نقطهٔ است که قطعه خط $\overline{AB}$ را خارجاً به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می نماید

**ثبوت** : فرضاً Q نقطه دیگری است که خط $\overline{AB}$ را خارجاً به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم نموده است یعنی

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{m}{n} \quad \cdots\cdots \quad \text{I}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n} \quad \cdots\cdots \quad \text{II}$$

از مقایسهٔ I و II چنین نتیجه میشود.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{P.B}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}$$

$$\text{VI} \quad \cdots\cdots \quad \frac{\overline{AP}-\overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}-\overline{QB}}{\overline{OB}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QB}}$$

چون صورت ها باهم مساوی اند پس

$$\overline{PB} = \overline{QB}$$

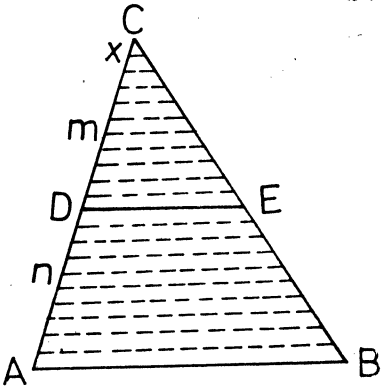
رابطهٔ اخیر الذکر زمانی درست است که نقاط P و Q باهم منطبق باشد پس P یگانه نقطه است که قطعه خط $\overline{AB}$ را به نسبت $\frac{m}{n}$ خارجاً تقسیم می نماید.

8 - 2 **قضیه** : اگر یک خط موازی بیک ضلع مثلث رسم گردد دو ضلع دیگر آنرا به قطعات متناسبه تقسیم میکند.

**مفروض** : در مثلث ABC قطعه خط $\overline{DE}$ موازی به ضلع $\overline{AB}$ رسم گردیده است .

**مطلوب :** میخواهیم ثابت نمائیم که :

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$$ است .



شکل (2-8)

**ثبوت :** با استفاده از یک واحد طول مناسب قطعه خط $\overline{CD}$ را به m حصه مساوی و $\overline{DA}$ را به n حصهٔ مساوی تقسیم میکنیم

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{m}{n} \quad \cdots\cdots\cdots \quad I$$

از نقاط تقسیمات $\overline{CA}$ موازی ها به $\overline{AB}$ رسم میکنیم. موازی های مذکور $\overline{CE}$ را به m حصه و $\overline{EB}$ را به n حصه تقسیم مینماید

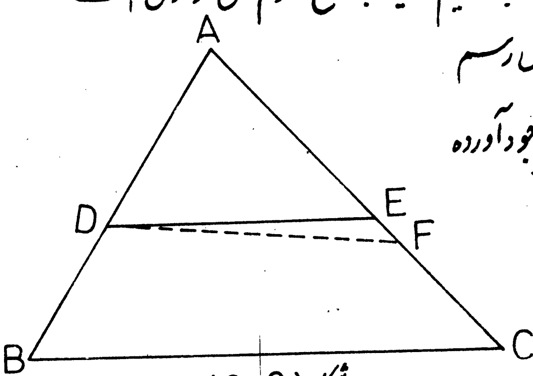
$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = \frac{m}{n} \quad \cdots\cdots\cdots \quad II$$

از مقایسهٔ روابط I و II داریم که :

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad III$$ است

## 2-9 قضیه :

اگر یک خط دو ضلع یک مثلث را متناسباً تقسیم نماید به ضلع سوم آن موازی است .



شکل (2-9)

**مفروض :** در مثلث ABC قطعه خط $\overline{DE}$ طوری رسم شده است که رابطه $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ را بوجود آورده است .

**مطلوب :** میخواهیم ثبوت نمائیم که خط $\overline{DE}$ موازی به $\overline{BC}$ میباشد .

**ثبوت :** اگر خط $\overline{DE}$ موازی به $\overline{BC}$ نباشد $\overline{DF}$ را موازی به $\overline{BC}$ رسم میکنیم شکل (2-9)

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} \text{......} I$$ .... قرار دعوی (2-7)

از طرف دیگر

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \text{......} II$$ .... قرار فرضیه

از مقایسهٔ مساوات I و II چنین نتیجه میشود که :

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

ویا :

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} + 1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} + 1$$

$$\frac{\overline{AF}+\overline{FC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AE}+\overline{EC}}{\overline{EC}}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$$

از رابطهٔ اخیر الذکر چنین نتیجه میشود که :

$\overline{EC} = \overline{FC}$ .......... چرا؟

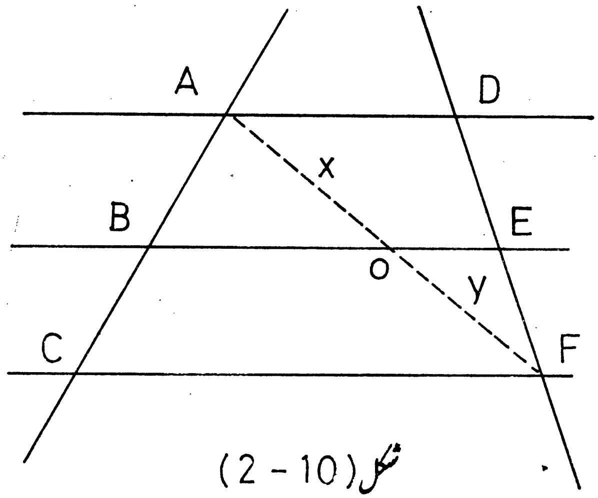
رابطه $\overline{EC} = \overline{FC}$ وقتی حقیقت دارد که E و F باهم منطبق باشند پس خطوط DE و DF باهم منطبق بوده و موازی به $\overline{BC}$ میباشد.

## 2-10 قضیه :

اگر خطوط موازی $\overline{AD}$، $\overline{BE}$، $\overline{CF}$ توسط خطوط $\overline{AC}$ و $\overline{DF}$ قطع شوند خطوط موازی بالای قاطع ها، قطعات متناسب جدا میکنند.

**مفروض :** $\overline{AD} // \overline{BE} // \overline{CF}$ اند و قاطع های $\overline{AC}$ و $\overline{DF}$ آنها را مطابق

شکل (2-10) قطع کرده است .



شکل (2-10)

**مطلوب :** میخواهیم ثابت نمائیم که :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

**ترسیم :** A را به F وصل میکنیم و $\overline{AO} = x$ و $\overline{OF} = y$ است

**ثبوت :** در مثلث ACF خط $\overline{BE}$ موازی به $\overline{CF}$ است .

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{x}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad I$$
قضیه (2-7) ......

در مثلث AFD داریم که :

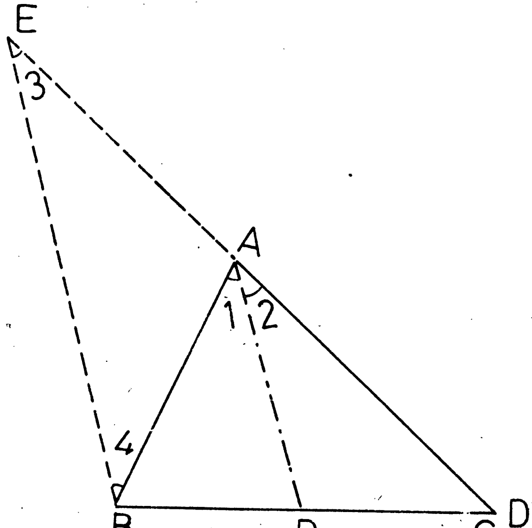
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{x}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad II$$
قضیه (2-7) ......

از مقایسهٔ مساوات I و II چنین نتیجه میشود که :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

**2 - 11 قضیه :**

ناصف الزاویهٔ هریک از زوایای داخلی مثلث ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر آن مثلث متناسباً (داخلاً) تقسیم مینماید شکل (2-11) .



شکل (2-11)

**مفروض :** $\overline{AD}$ ناصف الزاویهٔ A مثلث ABC است $\overline{AD}$ ضلع $\overline{BC}$ را در نقطه D قطع کرده است .

**مطلوب :** میخواهیم ثبوت کنیم که :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$$

**ثبوت :** از نقطه B یک خط راموازی به $\overline{AD}$ رسم میکنیم این خط امتداد یافته ضلع $\overline{AC}$ را درنقطه E قطع خواهد کرد الحال قرار شکل (11-2) داریم که :

$\hat{2} = \hat{3}$ ....... متوافقه اند

و $\hat{1} = \hat{4}$ ....... متبادله اند

چون $\hat{1} = \hat{2}$ است

از مقایسهٔ روابط فوق چنین نتیجه میشود که :

$\hat{3} = \hat{4}$ ...... چرا؟

رابطه فوق نشان میدهد که مثلث ABE متساوی الساقین است یعنی .

$\overline{AE} = \overline{AB}$ ......... I

چون درمثلث CBE، $\overline{BE} // \overline{AD}$ است لذا :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \quad ....... \quad II$$

اگر قیمت AE را از رابطه I در رابطه II وضع کنیم درنتیجه داریم که :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

رابطه اخیر توضیح میکند که نقطه D ضلع $\overline{BC}$ را داخلاً به نسبت اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ تقسیم نموده است .

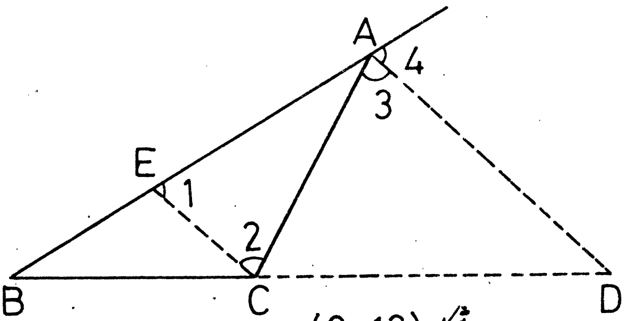
## 2-12 قضیه :

ناصف الزاویهٔ هریک از زوایای بیرونی یک مثلث ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور متناسباً (خارجاً) تقسیم مینماید.

**مفروض :** خط $\overline{AD}$ ناصف الزاویهٔ خارجی زاویهٔ $\hat{A}$ مثلث ABC است شکل (2-12)

**مطلوب :** میخواهیم ثبوت کنیم که :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$$ است




شکل (2-12)

**ثبوت :** خط $\overline{CE}$ راموازی به $\overline{AD}$ از نقطهٔ C رسم می نمائیم

این موازی ضلع $\overline{AB}$ را در نقطهٔ E قطع می نماید نظر به شکل داریم که :

$\hat{1} = \hat{4}$ ........ قرار متوافقه

و $\hat{2} = \hat{3}$ ......... قرار متبادله

چون : $\hat{3} = \hat{4}$ است ..... قرار فرضیه

از مقایسهٔ روابط بالا چنین نتیجه میشود که :

$$\hat{1} = \hat{2}$$

رابطهٔ فوق نشان میدهد که مثلث AEC متساوی الساقین است یعنی :

$$\overline{AE} = \overline{AC} \quad \text{..........} \quad I$$

در مثلث ABD خطوط $\overline{CE}$ و $\overline{AD}$ باهم موازی است لذا :

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \quad \text{........} \quad II$$

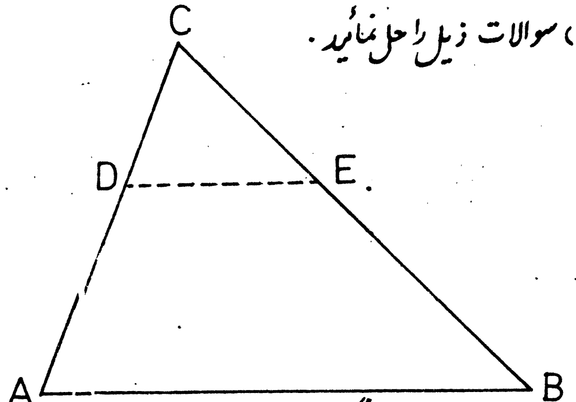
نظر به روابط I و II میتوانیم بنویسیم که :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$$

روابط اخیر بیانگر آن است که نقطهٔ D ضلع $\overline{BC}$ را خارجاً به نسبت ضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ تقسیم نموده است .

# تمرینات

مطابق شکل (2-13) سوالات ذیل را حل نمائید .




شکل (2-13)

1- اگر $\overline{AD}=3cm$ ، $\overline{DC}=2cm$ و $\overline{BE}=6cm$ باشد قیمت $\overline{EC}=$ ؟ است

2- اگر $\overline{AD}=5cm$ ، $\overline{DC}=4cm$ و $\overline{BE}=12cm$ باشد قیمت $\overline{EC}=$ ؟ است

3- اگر $\overline{CD}=3cm$ ، $\overline{AD}=5cm$ و $\overline{CE}=9cm$ باشد قیمت $\overline{BE}$ ؟ است

4- اگر $\overline{AD}=\frac{4}{3}cm$ ، $\overline{DC}=\frac{1}{2}cm$ و $\overline{BE}=4cm$ باشد قیمت $\overline{EC}=$ ؟ است

5- اگر $\overline{AC}=18cm$ ، $\overline{AD}=5cm$ و $\overline{BC}=24cm$ باشد قیمت $\overline{BE}=$ ؟ است

6- اگر $\overline{AC}=22cm$ ، $\overline{CD}=15cm$ و $\overline{BC}=33cm$ باشد قیمت $\overline{BE}=$ ؟ است

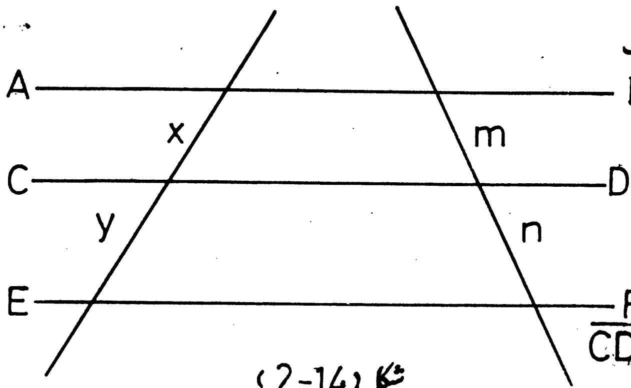
7- اگر $\overline{AC}=8cm$ ، $\overline{BC}=12cm$ و $\overline{AD}=\overline{CE}$ باشد قیمت $\overline{BE}=$ ؟ است

8- اگر $\overline{CD}=1$ ، $\overline{DA}=a$ و $\overline{CE}=b$ باشد آیا $\overline{BE}=ab$ است؟

مطابق شکل (2-14) سوالات ذیل را حل نمائید .

1- $x=4cm$ ، $m=6cm$ ، $n=8cm$ و $y=?$

2- $x=5cm$ ، $y=6cm$ ، $m=4cm$ و $m+n=?$




شکل (2-14)

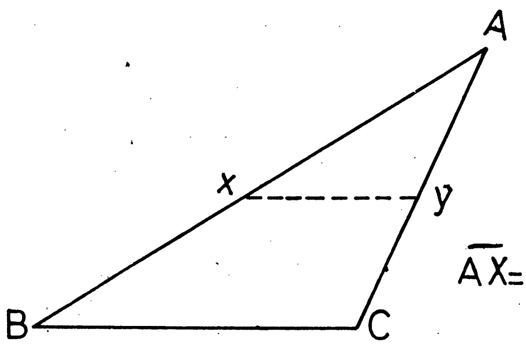
3- طول قطعه خط $\overline{AB}=9,6cm$ است و توسط نقطه C داخلاً به نسبت $\frac{5}{7}$ تقسیم شده است طول $\overline{AC}$ و $\overline{CB}$ را دریافت نمائید .

4- طول قطعه خط مستقیم $\overline{CD}=4,5cm$ است و توسط نقطهٔ M خارجاً به نسبت $\frac{11}{3}$ تقسیم شده است طول قطعات تقسیم شده را محاسبه نمائید .

5- اگر $\overline{AB}=6,4cm$ باشد و داخلاً نقطهٔ X و خارجاً نقطهٔ Y به نسبت $\frac{5}{3}$ تقسیم نموده است نقاط x و y را تعیین نمائید .

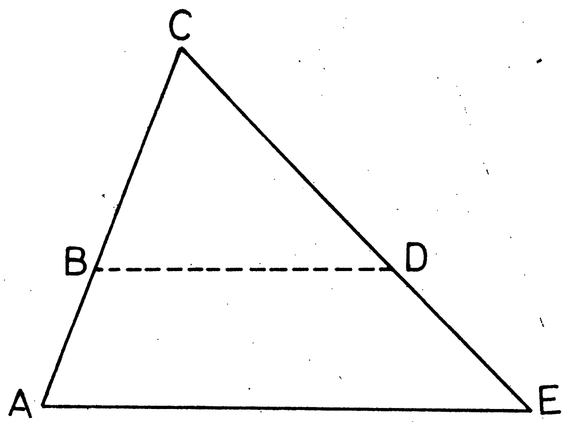
6- اگر $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ و $\frac{y}{z}=\frac{b}{c}$ باشد نشان دهید که $\frac{x}{z}=\frac{a}{c}$ است .

7- در مثلث ABC خط $\overline{xy}$ موازی به ضلع $\overline{BC}$ رسم گردیده است این خط موازی اضلاع مثلث را در نقاط x و y قطع مینماید اگر $\overline{AB}=3,6cm$ ، $\overline{AC}=2,4cm$ ، $\overline{AX}=2,1cm$ باشد طول $\overline{AY}$ را محاسبه نمائید .




شکل (2-15)

درشکل (2-16) خط $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ است کدام یکی از روابط ذیل صحت دارد .




شکل (2-16)

1- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$

2- $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CE}}$

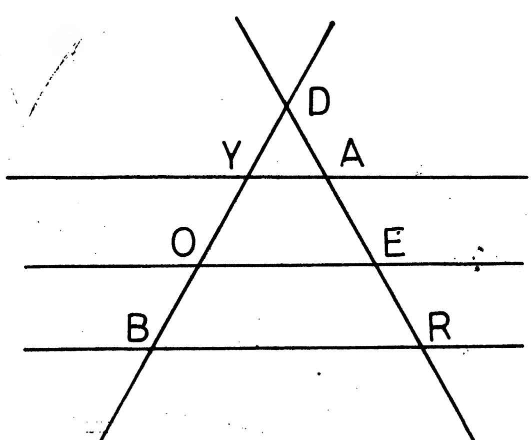
3- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$

4- $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{CD}}$

5- $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{DC}}$

6- $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{DC}}$

درشکل (2-17) خطوط $\overline{YA} \parallel \overline{OE} \parallel \overline{BR}$ است درکسور ذیل جای های خالی را تکمیل نمائید .




شکل (2-17)

7- $\dfrac{\overline{YO}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\underline{\qquad}}$

8- $\dfrac{\underline{\qquad}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{YB}}{\overline{YO}}$

9- $\dfrac{\overline{DR}}{\underline{\qquad}} = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{YB}}$

10- $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{DR}} = \dfrac{\underline{\qquad}}{\overline{DB}}$

11- $\frac{\overline{YB}}{\overline{OB}} \quad \frac{\quad}{\overline{ER}}$

12- $\frac{\overline{DY}}{YO} \quad \frac{\overline{DA}}{\quad}$

13- $\frac{\quad}{\overline{AE}} \quad \frac{\overline{DO}}{\overline{YO}}$

14- $\frac{\overline{ER}}{\quad} \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{DO}}$

15- درمثلث ABC اضلاع $b=4cm$ ، $c=4{,}5cm$ و $a=5cm$ است اگر $\overline{CM}$ ناصف الزاویه داخلی $\hat{C}$ باشد طول قطعات $\overline{AM}$ و $\overline{MB}$ را محاسبه نمائید.

16- درمثلث ABC ازیک نقطهٔ کیفی P ضلع $\overline{AC}$ به اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ موازی ها رسم میکنیم که این موازات اضلاع مذکور را علی الترتیب درنقاط D و E قطع میکند نشان دهید که:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$$

## تمرینات عمومی

### گروپ اول:

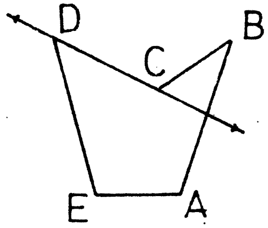
- درسوالات ذیل برای هر سوال چار جواب داده شده است ودرجواب صحیح را دایره بکشید

1- اگر $a=5cm$ و $b=4cm$ باشد نسبت $\frac{b}{a}$ عبارت است از:

a- $\frac{5}{4}$     b- $\frac{4}{4}$

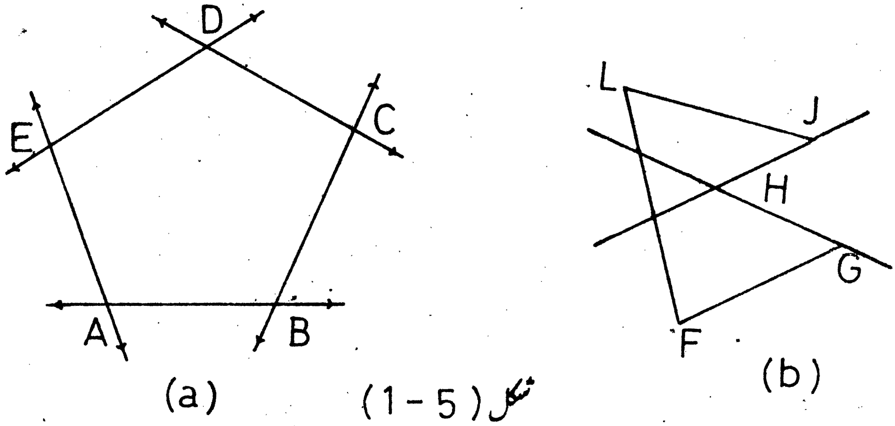
c- $\frac{4}{5}$ cm     d- $\frac{5}{5}$ cm

2-2 1 **مضلع مقعر** :- هر مضلع که محدب نباشد، مضلع مقعر نامیده میشود در شکل (4-1) ضلع $\overline{CD}$ مضلع را بدو طرف امتداد داده شده دیده می شود که نقاط B ، E و A مضلع بدو طرف این ضلع امتداد یافته قرار دارند لذا این مضلع را مقعر می نامند.




شکل (4-1)

**مثال** :- شکل (1-5a) یک مضلع محدب ABCDE را نشان میدهد. شکل (1-5b) مضلع مقعر FGHJL را نشان میدهد که در آن رأس های F و L بدو طرف خط $\overline{GH}$ و همچنان بدو طرف امتداد یافته $\overline{HJ}$ واقع اند.




شکل (1-5)

در مبحث های بعدی ما تنها مضلع محدب را مطالعه خواهیم نمود. لذا در صورت ذکر کلمه مضلع اگر بطور خاص مقعر یا محدب ذکر نشده باشد، هدف مضلع محدب است.

**تمرین** 1-1 :

1- در شکل (6-1) کدام آنها مضلع محدب است و کدام آنها مضلع نیستند.

2 - اگر $\overline{LM}$ موازی به ضلع AB مثلث ABC رسم گردد

a - ضلع مقابل را متناسباً تقسیم میکند.　　b - ضلع مجاور را متناسباً تقسیم مینماید.

c - هردو غلط است.　　d - هردو صحت است.

3 - اگر $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ باشد میتوانیم بنویسیم که:

a - $bd = ac$　　b - $ad = bc$

c - $a^2d = b^2c$　　d - $ad^2 = bc^2$

4 - ناصف های داخلی و خارجی زاویه A مثلث ABC یکی از زوایای ذیل را بین هم تشکیل میدهند

a - $90^\circ$　　b - $180^\circ$

c - $120^\circ$　　d - $80^\circ$

5 - ناصف الزاویه داخلی زاویه A مثلث ABC ضلع مقابل را به نسبت:

a - اضلاع مجاور تقسیم میکند　　b - اضلاع مقابل تقسیم میکند.

c - هردو صحت است　　d - هرسه غلط است.

6 - ناصف الزاویهٔ خارجی زاویه A مثلث ABC ضلع مقابل را به نسبت

a - ضلع مقابل متناسباً تقسیم میکند　　b - به نسبت ضلع مجاور متناسباً تقسیم میکند.

c - هردو غلط است.　　d - هرسه صحیح است.

## گروپ دوم:

کدام یکی از افادات ذیل صحیح و کدام یکی غلط است در مقابل صحیح (ص)، و در مقابل افادهٔ غلط (غ) بکشید.

(　) 1 - نسبت را محض توسط علامهٔ ÷ ارایه میکنند.

(　) 2 - اگر $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ باشد پس $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ است.

(　) 3 - ناصف الزاویهٔ داخلی یک مثلث ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور متناسباً تقسیم میکند.

(  ) 4 - اگر $\frac{y}{13} = \frac{x}{27}$ باشد پس $\frac{x}{y} = \frac{27}{13}$ است .

(  ) 5 - اگر $d \neq o$ ، $b \neq o$ و $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد پس $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ است .

(  ) 6 - اگر $d \neq o$ و $b \neq o$ و نیز $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد پس $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ است .

## گروپ سوم :

جای های خالی را با الفاظ مناسب خانه پری نمائید .

1 - رابطه بین دو کمیت ......... میگویند

2 - ناصف الزاویه هر مثلث ضلع مقابل را به ......... تقسیم می نماید .

3 - در مثلث قایم الزاویه ناصف الزاویه خارجی زاویه ....... موازی به وتر است .

4 - اگر طول یک خط 15 cm وطول خط دومی 45 cm باشد نسبت طول خط اول بر طول خط دوم مساوی ......... است .

5 - علامه تناسب عبارت از .......... میباشد .

6 - اگر مخرج های دو نسبت مساوی باهم مساوی باشد صورت های آنها نیز باهم ......... است .

7 - اگر Q یک نقطه بروی خط $\overline{AB}$ باشد طوریکه $\overline{AQ} = \overline{QB}$ است نقطهٔ Q نقطهٔ ..... خط $\overline{AB}$ است .

8 - اگر یک خط دو ضلع یک مثلث را متناسباً تقسیم نماید به ضلع سوم آن ....... است

9 - ناصف الزاویه خارجی هر یک از زوایای مثلث ضلع مقابل را ....... اضلاع مجاور متناسباً تقسیم می نماید .

10 - ناصف الزوایای داخلی هر یک مثلث ضلع مقابل را ....... اضلاع مجاور متناسباً تقسیم میکند

# فصل سوم

## مشابهت (Similarity)

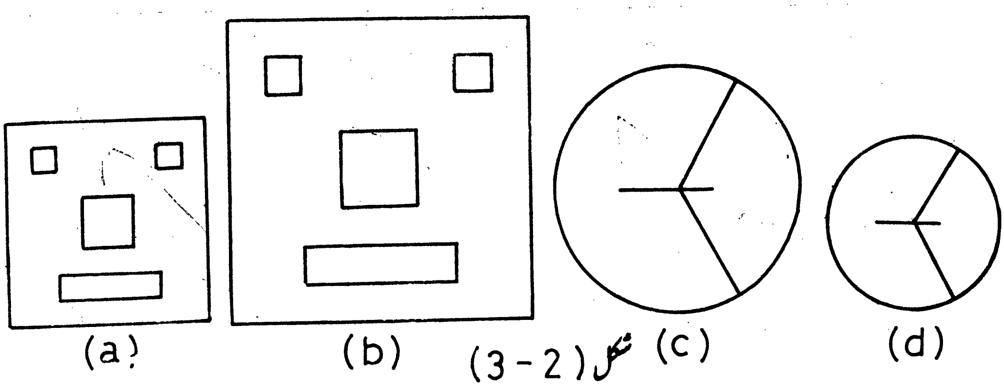
### 3 - 1 اشکال متشابه :

ما اشیا و اشکال را که اندازه های شان مساوی بود در صنوف گذشته مطالعه نمودیم و به مفهوم انطباق پذیری اشکال پی بردیم ولی اکثراً به اشیا و اشکالی برمیخوریم که شکل آنها همانند (همقواره) بوده ولی اندازه های شان مساوی نمیباشند. مثلاً در اشکال (1 - 3) نقشه های افغانستان ترسیم شده اند که یکی از آنها کلانتر و دیگرش کوچکتر است ولی از نظر شکل و قواره باهم مشابه اند به همین قسم اشکال زیاد وجود دارند که باهم مشابه اند.



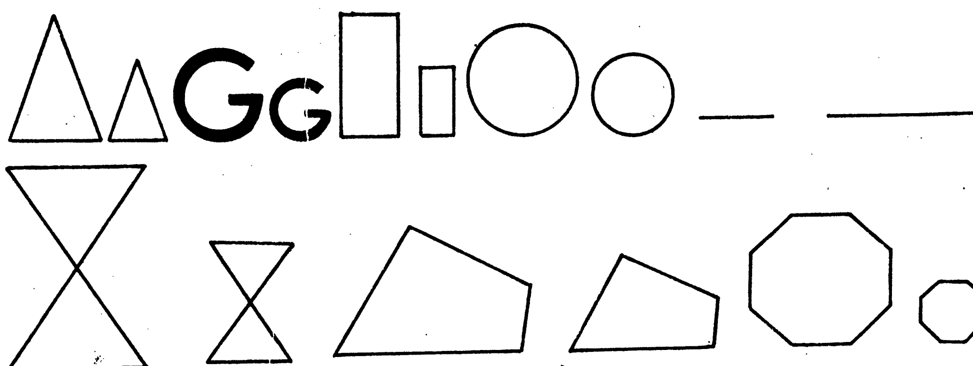
شکل (1 - 3)

**مثال :-** اگر در اشکال (2 - 3) دقت شود دیده میشود که اشکال (a) و (b) باهم مشابه میباشند. همچنین دیده می شود که شکل دایروی (c) از بزرگ ساختن متناسب شکل دایروی (d) بوجود آمده




شکل (3-2)

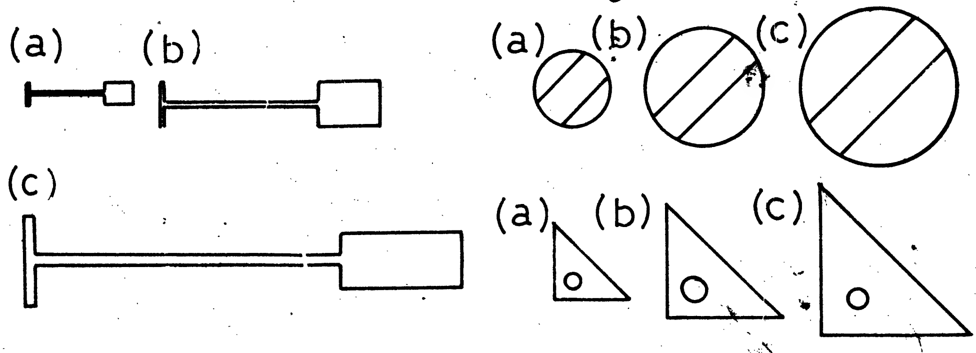
از مطالعهٔ مثال های فوق چنین نتیجه میشود که دو شکل هندسی وقتی مشابه گفته میشوند که به تمام معنی مانند هم (همقواره) بوده، اما ضرورت نیست که اندازه های شان باهم مساوی باشند. در اشکال (3-3) چند مثال از اشکال متشابه هندسی نشان داده شده اند.



شکل (3-3)

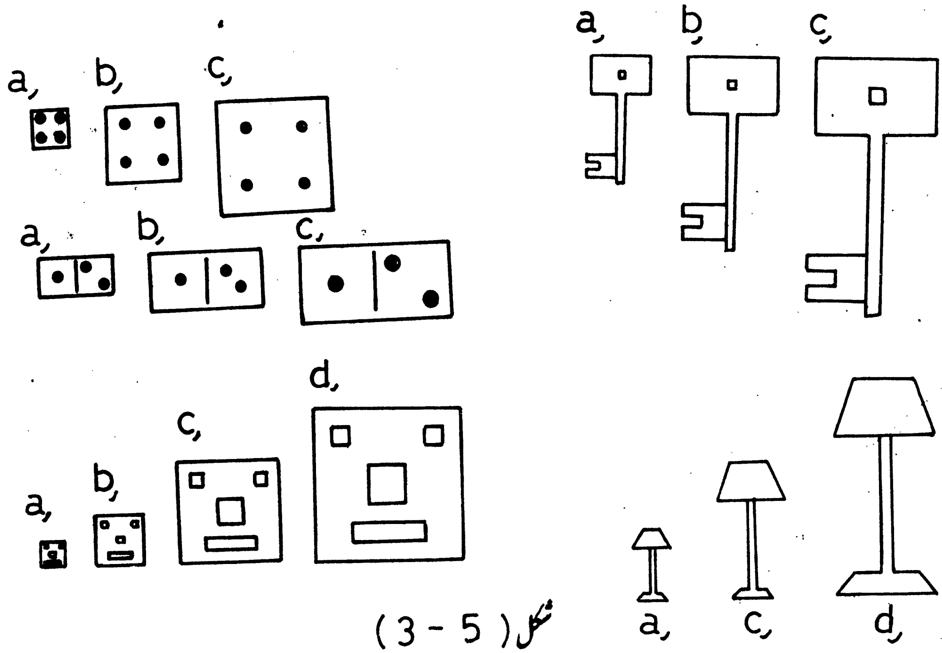
## تمرین 3-1:

1- در اشکال (3-4) هرجوره اشکال متشابه را نشان دهید.




اشکال (3-4)

2 - به اشکال ( 3 - 5 ) دقت نموده شکلی را که از هم قطاران خود مختلف باشد (مشابه نباشد) نشان دهید.




شکل ( 3 - 5 )

## 3 - 2 مضلعات متشابه :

برای مشابهت مضلعات دو شرط موجود است.

( 1 ) - تمام زوایای دو مضلع مشابه باید یک به یک باهم انطباق پذیر باشند.

( 2 ) - اضلاع مرتبط ( اضلاع مقابل زوایای انطباق پذیر) مضلعات مذکور باید باهم متناسب باشند.

**مثال :** در شکل ( 3 - 6 ) طول اضلاع مضلعات نشان داده شده و همچنین :

$\hat{B} \cong \hat{F}$ $\quad \hat{A} \cong \hat{E}$ $\quad \hat{D} \cong \hat{H}$ $\quad \hat{C} \cong \hat{G}$

پس به اساس تعریف و شرایط فوق مضلعات مذکور باهم متشابه اند. زیرا زوایای آنها یک به

یک باهم انطباق پذیر اند و همچنین تناسب ذیل بین اضلاع آن ها موجود است :

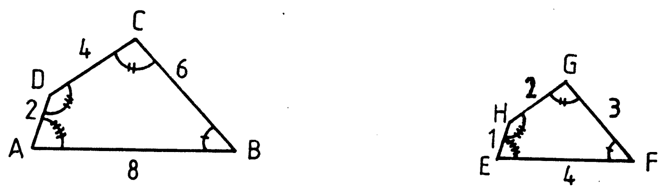
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

پس ضریب تناسب K در بین اضلاع مذکور 2 است .

تناسب فوق را چنین هم میتوانیم بنویسیم :

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$
$$= 1/2$$

در اینصورت ضریب تناسب $\frac{1}{2}$ است ( $K = \frac{1}{2}$ )




شکل ( 6 - 3 )

تشابه مضلعات توسط علامه ( ~ ) ارائه میشود . در مثال فوق مضلعات ABCD و EFGH باهم متشابه اند و چنین ارائه میگردند :

$$ABCD \sim EFGH$$

## 3 - 3 مثلث های متشابه :

اگر دو مثلث طوری داده شده باشد که تمام زوایای آنها یک به یک باهم انطباق پذیر و یا اضلاع شان باهم متناسب باشند گفته می شود که مثلث های مذکور متشابه اند .

**مثال :** در شکل ( 7 - 3 ) مثلث های ABC و $A'B'C'$ طوری داده شده اند که طول اضلاع مثلث $A'B'C'$ بالترتیب دوچند طول اضلاع $A\hat{B}C$ میباشد . مثلث های مذکور باهم متشابه بوده ولی

انطباق پذیر نیستند . زیرا از دوچند ساختن هر ضلع مثلث ABC بدون تغیره قواره مثلث A′B′C′ بدست آمده است . دربین اضلاع مثلث های مذکور روابط ذیل موجود است .

$$a' = 2a$$

$$b' = 2b$$

$$c' = 2c$$

پس $\frac{a'}{a} = 2$ ، $\frac{b'}{b} = 2$ و $\frac{c'}{c} = 2$ ازاین روابط نتایج ذیل رامیتوانیم بنویسیم ؛

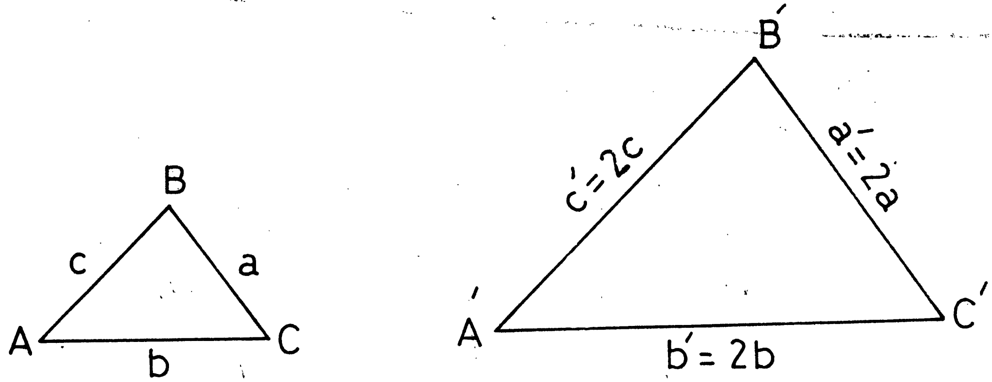
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2$$

مثلث A′B′C′ با مثلث ABC متشابه بوده وضریب تشابه دو است .

ویا

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{2}$$

مثلث ABC با مثلث A′B′C′ متشابه بوده وضریب تشابه $\frac{1}{2}$ است .



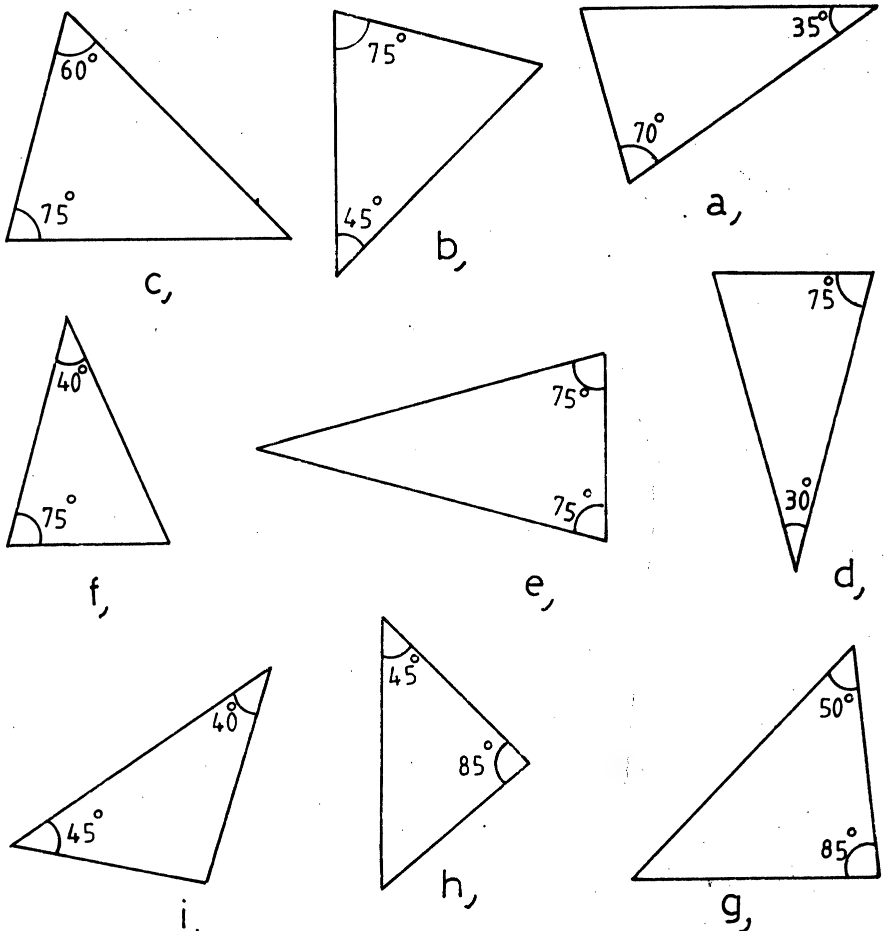

شکل ( 3 - 7 )

، همچنین تمام اشکال انطباق پذیر متشابه میباشند و ضریب تشابه شان مساوی به یک است .

قابل یادآوری است که شکل یک مثلث زمانی تغیر می نماید که طول یکی از اضلاع آن تغیر نماید . پس مثلث یک حالت خاص مضلعات بوده واز دوشرطی که برای تشابه مضلعات ضروری است اگر یکی از آنها صدق کند دیگرش نیز صدق میکند .

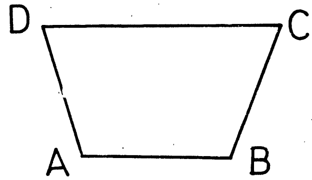
## تمرین 2 - 3 :

1 ـ درشکل ( 8 - 3 ) مثلث های متشابه را نشان دهید .




شکل ( 8-3 )

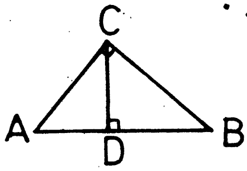
2 ـ چهارضلعی EFGH را متشابه به چهارضلعی ABCD رسم نمائید. شکل ( 9 - 3 ) درصورتیکه $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$ باشد وهم بگوئید قیمت K چند است ؟




شکل ( 9 - 3 )

3 ـ در شکل (10-3) مثلث های متشابه طوری ذیل داده شده اند .

$\overset{\triangle}{ACD} \sim \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{CBD}$



(3 - 10)

نسبت های ذیل را تکمیل نمائید :

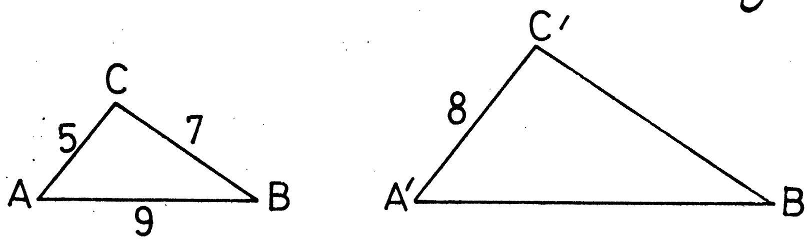
$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} =$ ____

$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} =$ ____

$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} =$ ____

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} =$ ____

4 ـ در شکل (11-3) دو مثلث متشابه داده شده . طول اضلاع $\overline{A'B'}$ و $\overline{B'C'}$ را دریافت نمائید.



شکل (11 - 3)

## 1 - 3 - 3 قضیه :

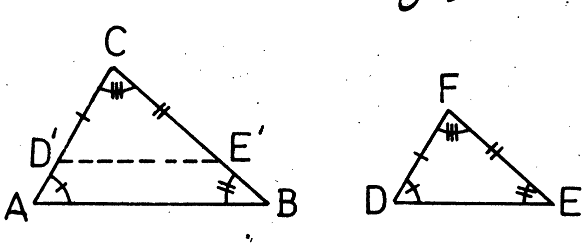
هرگاه وسعت سه زاویهٔ یک مثلث یک به یک با سه زاویه مثلث دیگر انطباق پذیر باشند. مثلث ها باهم متشابه اند .

**مفروض :** مثلث های ABC و DEF قرار شکل (12-3) طوری داده شده که :

$\hat{A} \cong \hat{D}$

$\hat{B} \cong \hat{E}$ ............ (1)

$\hat{C} \cong \hat{F}$



شکل (12 - 3)

مطلوب : ثبوت میکنیم که مثلث های ABC و DEF باهم مشابه اند .

ثبوت : برای اثبات این قضیه باید تناسب ذیل را ثبوت نمائیم :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

فرض میکنیم ضلع $\overline{AC} > \overline{DF}$ است ( اگر $\overline{AC} = \overline{DF}$ باشد ، مثلث ها انطباق پذیر میشوند . زیرا قرار مفروض زوایا انطباق پذیر اند . ما میتوانیم $\overline{AC} < \overline{DF}$ هم فرض نمائیم (در آن صورت برای اثبات باید اول مثلث ها باهم تبدیل گردند) .

اگر نقاط $D'$ و $E'$ طوری بالای $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ واقع باشند که $\overline{D'C} = \overline{DF}$ و $\overline{E'C} = \overline{EF}$ باشند ( $\hat{C} \cong \hat{F}$ قرار مفروض ) . پس :

$$\overset{\triangle}{D'E'C} \cong \overset{\triangle}{DEF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

از رابطهٔ فوق چنین نتیجه میگیریم که :

$$\begin{aligned} C\hat{D'}E' &\cong \hat{D} \\ C\hat{E'}D' &\cong \hat{E} \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

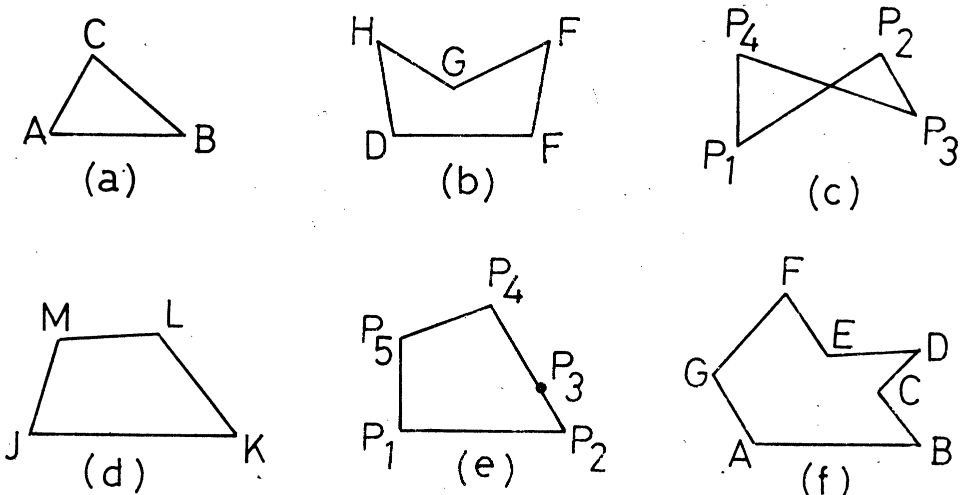
با استفاده از رابط ( 1 ) و ( 4 ) مینویسیم :

$$\begin{aligned} C\hat{D'}E' &\cong \hat{A} \\ C\hat{E'}D' &\cong \hat{B} \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

پس به اساس رابطه ( 5 ) :

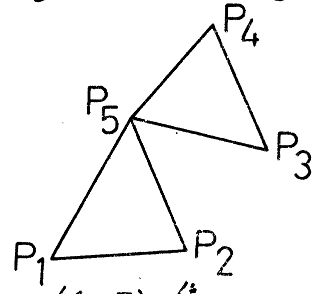
$$\overline{D'E'} \parallel \overline{AB} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\frac{\overline{D'C}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{E'C}}{\overline{BC}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$



شکل (1 - 6)

2 - درشکل (7 - 1) شش قطعه خط داده شده هیچ دو قطعه متقاطع نیستند به جز در نقاط انجام و هم هیچ دو قطعه خط به امتداد یک خط مستقیم واقع نیستند. پس این شکل مضلع است و یا نه؟ اگر مضلع نیست چرا؟



شکل (1-7)

3 - کمترین تعداد اضلاع که یک مضلع مقعر را می سازد چند خواهد بود؟

3 - 1 مضلع متساوی الزوایا : مضلع را گویند که تمام زوایای آن باهم انطباق پذیر باشند.

4 - 1 مضلع متساوی الاضلاع : مضلع را گویند که تمام اضلاع آن باهم مساوی باشند.

5 - 1 زوایای مضلع :

1-5-1 زاویه داخلی مضلع : زاویه بین هر دو ضلع مجاور را زاویهٔ مضلع می نامند.

شکل (8 - 1)

پس رابطهٔ (7) رامیتوانیم چنین بنویسیم

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

یا

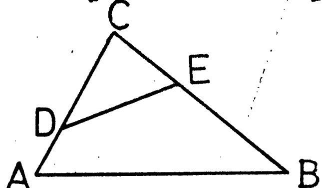
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

رابطه (9) مساوات اول رابطهٔ (2) رانشان میدهد که ثبوت آن مطلوب بود.

به عین طریق شما میتوانید رابطه $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ را ثبوت نمائید.

## تمرین 3-3 :

1 - اگر زوایای رأس دو مثلث متساوی الساقین باهم انطباق پذیر باشند ثبوت نمائید که مثلث های مذکور مشابه اند.



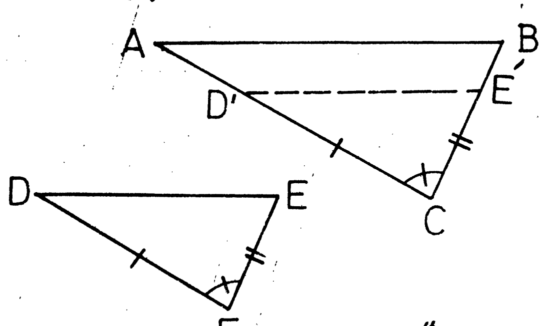

شکل (3-13)

2 - اگر شکلی مشابه بیک مثلث قایم الزاویه باشد آیا شکل مذکور مثلث قایم الزاویه است.

3 - در شکل (3-13)، $C\hat{E}D \cong \hat{A}$ داده شده ثبوت نمائید که $C\hat{A}B \sim C\hat{E}D$ است.

## 3-3-2 قضیه :

هرگاه دو ضلع یک مثلث با دو ضلع مثلث دیگر متناسب و زاویهٔ مابینی این دو ضلع در هر دو مثلث انطباق پذیر باشند مثلث ها باهم مشابه اند.




شکل (3-14)

**مفروض :** مثلث های ABC و DEF قرار شکل (3-14) داده شده. طوریکه:

$\hat{C} = \hat{F}$ و $\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \dots (1)$

**مطلوب**: ثبوت میکنیم که ، $\hat{ABC} \sim \hat{DEF}$

**ثبوت**: مثلث DEF را بالای مثلث ABC طوری قرار میدهیم که $\hat{F}$ به $\hat{C}$ منطبق گردد . در اینصورت مثلث DEF شکل $\hat{D'E'C}$ را بخود می گیرد یعنی $\hat{D'E'C} \cong \hat{DEF}$ است.

پس $\overline{DE} = \overline{D'E'}$ ، $\overline{D'C} = \overline{DF}$ و $\overline{E'C} = \overline{EF}$ و بانظرداشت رابطه ( 1 ) میتوانیم بنویسیم که :

$$\frac{\overline{D'C}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{E'C}}{\overline{BC}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

رابطهٔ ( 2 ) بیانگر آن است که ( 3 ) ... $\overline{D'E'} \parallel \overline{AB}$ میباشد .

لذا $\hat{A} = E'\hat{D'}C$ و $\hat{B} = D'\hat{E'}C$ اند بنا بر آن

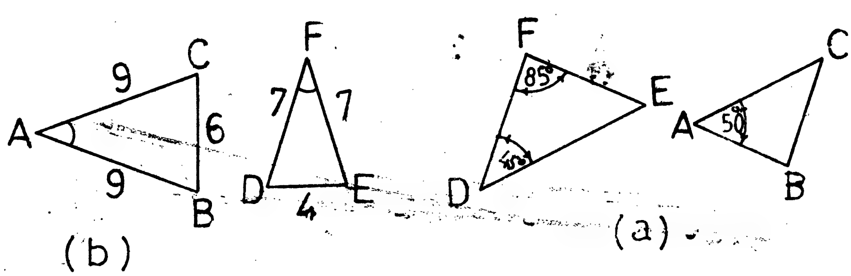
$$\hat{ABC} \sim \hat{D'E'C} \quad \dots\dots\dots (4)$$

وچون $\hat{DEF} \cong \hat{D'E'C}$

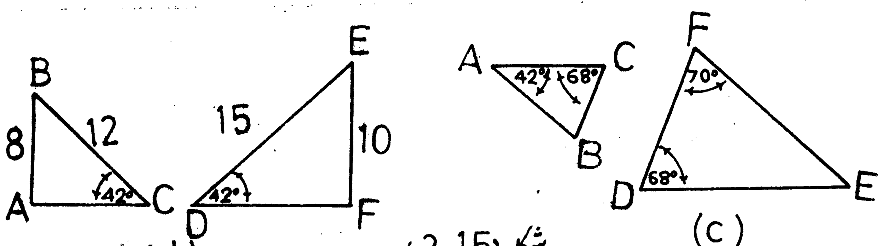
پس $\hat{ABC} \sim \hat{DEF}$ است

## تمرین 4 - 3 :

- درشکل (15-3) با استفاده ازمعلومات داده شده بگوئید که هر جورهٔ مثلثها مشابه اند یا نه . درصورت تشابه زوایای مربوطه رانام گیرید .




شکل (15-3)



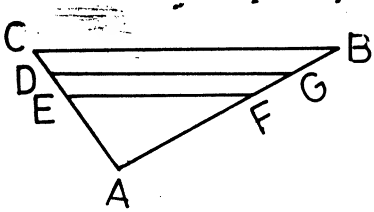
(d) (c)

شکل (3-15)

2 - در شکل (3-16) اگر $A\hat{E}F \sim A\hat{B}C$ و $\overline{DG} \parallel \overline{CB}$ باشد ثبوت کنید که :

(a) $A\hat{D}G \sim A\hat{C}B$

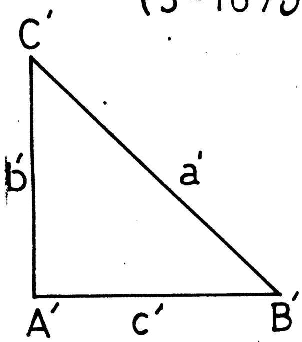
(b) $\overline{EF} \parallel \overline{CB}$

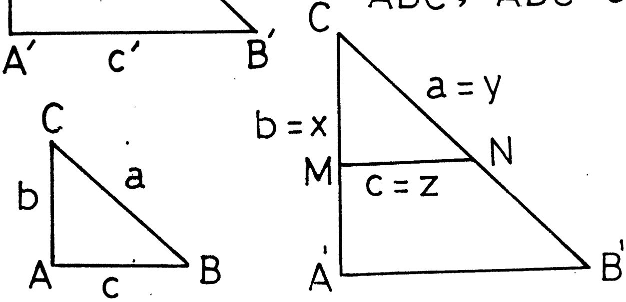


شکل (3-16)

## 3-3-3 قضیه :

اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند مثلث های مذکور باهم مشابه اند .





شکل (3-17)

**مفروض :** در شکل (3-17) مثلث های ABC ، $A'B'C'$ داده شده طوریکه :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

یا

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

**مطلوب :** میخواهیم ثابت نمائیم که $A\hat{B}C \sim A'\hat{B'}C'$

**ترسیم :** به روی اضلاع $\overline{C'A'}$ و $\overline{C'B'}$ قطعات $\overline{C'M}$ و $\overline{C'N}$ را طوری جدا میکنیم که $\overline{C'M} = \overline{b}$ و $\overline{C'N} = \overline{a}$ باشد این قطعات را به $\overline{x}$ و $\overline{y}$ ارائه می نمائیم . M را به N وصل نموده وطول $\overline{MN}$ را $\overline{Z}$ می نامیم .

**ثبوت :** در دو مثلث $C'MN$ و $C'A'B'$ داریم :

قرار فرضیه ......... $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

قرار ترسیم ......... $\frac{y}{a'} = \frac{x}{b'}$

از طرف دیگر $\hat{C'}$ در هر دو مثلث مشترک است پس :

قرار قضیه (3-3-2) ........... $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{MNC'}$

در نتیجه : چرا؟ ............... $\frac{c'}{b'} = \frac{z}{x}$

اما قرار فرضیه ............... $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

ویا خواص تناسب ............... $\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$

از مقایسهٔ روابط فوق چنین نتیجه میگیریم که :

$$\frac{z}{x} = \frac{c}{b}$$

چون قرار ترسیم $x = b$ است

بناءً $\frac{z}{b} = \frac{c}{b}$

لذا $z = c$ ......... خواص تناسب

پس سه ضلع مثلث $CAB$ با سه ضلع مثلث $C'MN$ یک به یک مساوی است

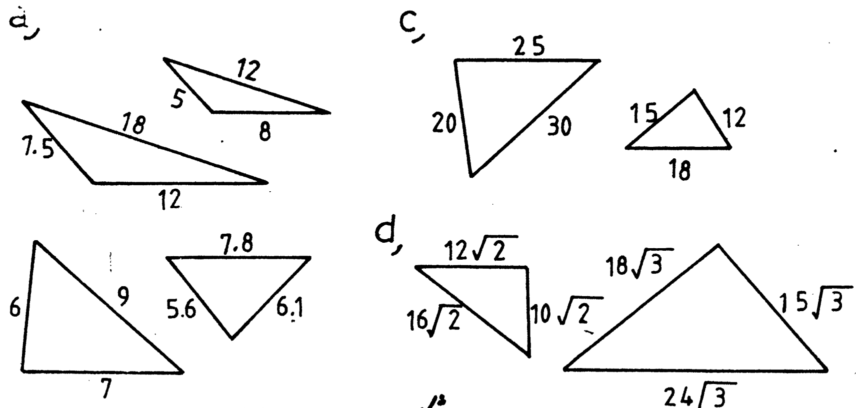
لذا مثلث های مذکور انطباق پذیر اند .

چون مثلث $C'MN$ با مثلث $C'A'B'$ در بالا مشابه ثبوت گردیده بنابر آن مثلث $CAB$

با مثلث $C'A'B'$ مشابه است .

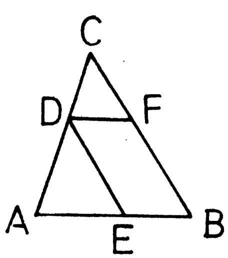
## تمرین 3 - 5 :

1 - کدام جوره از مثلث های ذیل باهم مشابه اند .



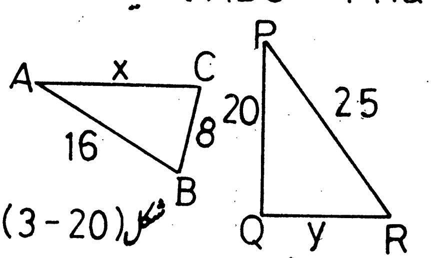
شکل (3 - 18)

2 - در شکل (3-19) ، $A\hat{E}D \sim D\hat{F}C$ ، $\hat{A} = 72^\circ$ و $E\hat{D}F = 83^\circ$ داده شده وسعت زوایای باقی مانده شکل را در صورت امکان دریافت نمائید.



شکل (3 - 19)

3 - در شکل (3-20) اگر $A\hat{B}C \sim P\hat{R}Q$ باشد قیمت های x و y را دریافت نمائید.



شکل (3 - 20)

4- اگر طول اضلاع یک مثلث بالترتیب 6cm ، 8cm و 12cm باشد وطول اضلاع مثلث دومی 1.5cm ، 2cm و 3cm باشد. آیا این دو مثلث باهم مشابه اند ؟

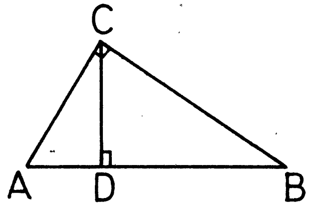
### 3-3-4 قضیه :

در هر مثلث قایم الزاویه ارتفاع مربوط رأس قایم ، مثلث مذکور را به دو مثلث تقسیم می نماید

که این مثلث های حاصل شده بین هم و با مثلث اصلی متشابه میباشد .

**مفروض :** مثلث ABC یک مثلث قایم الزاویه بوده که زاویه $\hat{C}$ آن قایمه میباشد و ارتفاع $\overline{CD}$ از رأس C به وتر $\overline{AB}$ رسم گردیده است . شکل (21-3)

**مطلوب :** میخواهیم ثبوت کنیم که :




شکل (21 - 3)

$$A\hat{D}C \sim A\hat{C}B$$

$$C\hat{D}B \sim A\hat{C}B$$

$$A\hat{D}C \sim C\hat{D}B$$

**ثبوت :** در مثلث های $A\hat{D}C$ و $A\hat{C}B$ داریم که :

هردو قایمه اند ..... $A\hat{C}B \cong A\hat{D}C$

زاویهٔ مشترک ..... $\hat{A} \cong \hat{A}$

رابطهٔ بالا نشان میدهد که دو زاویهٔ مثلث های مذکور یک به یک باهم انطباق پذیر اند . پس زاویهٔ سوم آنها هم انطباق پذیر بوده و درنتیجه :

$A\hat{C}B \sim A\hat{D}C$ است .

در مثلث های $C\hat{D}B$ و $A\hat{C}B$ داریم که :

هردو مثلث قایمه اند .......... $A\hat{C}B \cong C\hat{D}B$

زاویهٔ مشترک .......... $\hat{B} \cong \hat{B}$

چون دو زاویهٔ دو مثلث انطباق پذیر اند . پس زاویهٔ سوم شان نیز انطباق پذیر میباشد و درنتیجه :

$A\hat{C}B \sim C\hat{D}B$ است .

**نوت :** قسمت سوم را شما خود ثابت نمائید .

# تمرینات فصل سوم

## گروپ اول :

جاهای خالی را باکلمات مناسب وجوابات صحیح پرنمائید.

1 - دومثلث وقتی باهم مشابه اندکه اگر ......... یک مثلث با ......... دیگر یک به یک انطباق پذیر باشند.

2 - دومضلع پنج ضلعی وقتی باهم مشابه اندکه :

a) .....

b) .....

3 - مضلعات مشابه دارای اضلاع........... و زوایای ........ میباشد .

4 - تمام مضلعات .......... باهم مشابه اند.

5 - درشکل (22-3) جاهای خالی راباجوابات صحیح پرنمائید . درصورتیکه اشکال داده شده باهم مشابه اند.

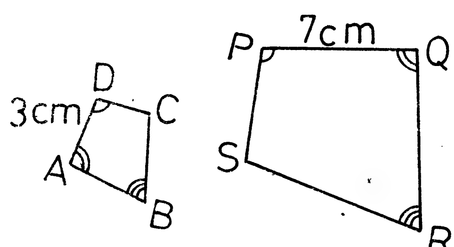
$\hat{S}$ = ______

$\frac{PQ}{DA}$ = ______

$\frac{QR}{\quad} = \frac{7}{3}$

$\frac{\quad}{BC} = \frac{7}{3}$

$\frac{SP}{CD}$ = ______




شکل (22-3)

6 - اگرقاعده های دومثلث متساوی الساقین باهم مساوی باشندمثلث های مذکورباهم...... و...... اند.

7 - یک مثلث متساوی الاضلاع هیچگاه بایک مثلث ....... مشابه نمیباشد .

8 - اگر دومثلث متشابه باشند اضلاع آنها ........ است .

## گروپ دوم :

درمقابل هرسوال صحیح (ص) ودرمقابل سوال غلط (غ) بگذارید .

( ) 1 – دومثلث قایم الزاویه وقتی باهم مشابه اندکه یکی اززوایای حاده شان باهم انطباق پذیر باشد .

( ) 2 – دومثلث قایم الزاویه درصورتی باهم مشابه اندکه طول وترهای شان مساوی باشد .

( ) 3 – تمام مستطیل ها باهم مشابه اند .

( ) 4 – تمام مضلعات هشت ضلعی باهم مساوی اند .

( ) 5 – اگردوضلع وزاویهٔ مابین یک مثلث بادوضلع وزاویهٔ مابین مثلث دیگرانطباق پذیر باشد . مثلث های مذکورباهم مشابه اند .

( ) 6 – دومضلع انطباق پذیر باهم مشابه نیزمیباشد .

( ) 7 – اگرسه ضلع یک مثلث باسه ضلع مثلث دیگرموازی باشند مثلث های مذکورباهم مشابه اند .

( ) 8 – تمام مثلث های مشابه انطباق پذیر اند .

( ) 9 – تمام مثلث های قایم الزاویه باهم مشابه اند .

( ) 10 – امکان داردچهارضلعي رارسم نمائیم که مربع نبوده ولی هرچهارضلع آن باهم مساوی باشند

( ) 11 – تمام مضلعات متساوی الزوایای چهارضلعی باهم مشابه اند .

## گروپ سوم :

درمقابل هرسوال چهار جواب داده شده شما بدور شماره جواب صحیح حلقه بکشید .

1 - درکدام یکی از حالات ذیل دو مثلث مشابه اند .

a - دو زاویه یک مثلث $60^\circ$ و $70^\circ$ و دو زاویه مثلث دیگر $50^\circ$ و $80^\circ$ باشد.

b - دوزاویه یک مثلث $45^\circ$ و $75^\circ$ و دوزاویه مثلث دیگر $45^\circ$ و $60^\circ$ باشد.

c - وسعت یکی اززوایای یک مثلث $40^\circ$ وطول دوضلع آن هرکدام 8cm باشد ووسعت یکی اززوایای مثلث دومی $70^\circ$ و طول دوضلع آن هرکدام 18cm باشد .

d - هیچ کدام .

2 - اندازه وسعت دوزاویهٔ مکمله دارای نسبت 2 : 3 است ، اندازه هرکدام :

a - $78^\circ$ و $12^\circ$ است

b - $54^\circ$ و $36^\circ$ است

c - $59^\circ$ و $31^\circ$ است

d - $120^\circ$ و $60^\circ$ است

3 - مثلث های ABC و DEF باهم مشابه اند طوریکه $\hat{A}=\hat{D}$ و $\hat{B}=\hat{E}$ است .

اگر $\overline{AC}=12\,cm$ و $\overline{AB}=9\,cm$ و $\overline{DE}=3\,cm$ باشد . در این صورت طول $\overline{DF}$ عبارت است از :

a - 3cm

b - 4cm

c - 6cm

d - 7cm

4 - مضلعات که دارای اضلاع متساوی بوده و تمام زوایای آن یک بیک انطباق پذیر نباشند .

a - پنج ضلعی اند.

b - مضلعات منظم اند .

c - مضلعات غیرمنظم اند.

d - مضلعات مشابه اند .

5 – تمام چهارضلعی های متساوی الزوایا باهم .

a – مشابه اند .　　　　b – انطباق پذیر اند .

c – متوازی الاضلاع اند .　　　　d – هیچکدام .

6 – یک مثلث متساوی الاضلاع مشابه است با :

a – مثلث مختلف الاضلاع .　　　　b – مثلث متساوی الساقین .

c – مثلث متساوی الزوایا .　　　　d – هیچکدام .

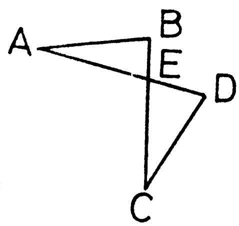
## گروپ چهارم :

سوال های ذیل را حل نمائید .

1 – درشکل (3-23) $\overline{AD}$ قطع خط $\overline{BC}$ را در نقطهٔ E قطع نموده اگر :

$\overline{AE} \cdot \overline{ED} = \overline{BE} \cdot \overline{EC}$ باشد.

ثبوت کنید که $\hat{B} \cong \hat{D}$ است .



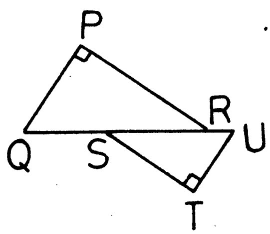

شکل (3-23)

2 – مثلث های $Q\hat{P}R$ و $S\hat{T}U$ دارای زوایای قایمهٔ $\hat{P}$ و $\hat{T}$ میباشند .

اگر $\overline{PR} // \overline{ST}$ باشد شکل (3-24)

ثبوت کنید که $Q\hat{P}R \sim S\hat{T}U$ و

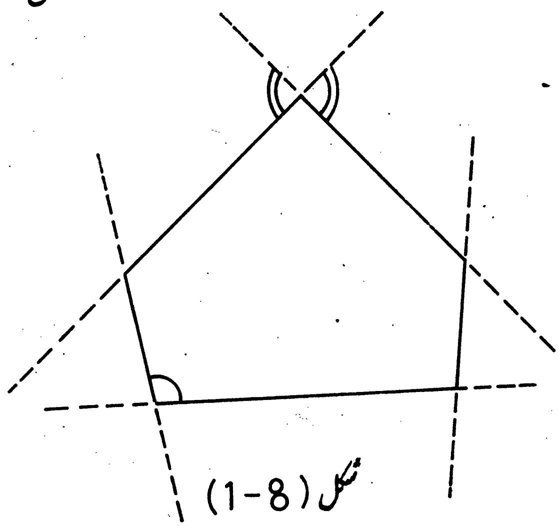
$\overline{PQ} \cdot \overline{SU} = \overline{RQ} \cdot \overline{TU}$ است




شکل (3-24)

## 2-5-1 زاویه خارجی مضلع :

زاویه را گویند که توسط یک ضلع مضلع وامتداد یافته ضلع مجاور آن تشکیل شود. شکل ( 8 - 1 )

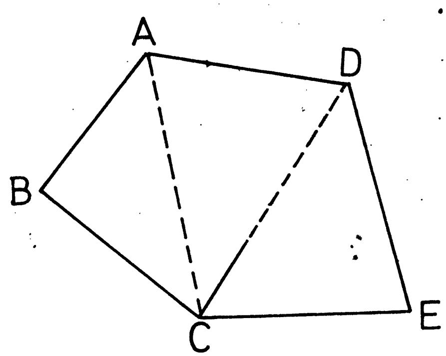


شکل (1-8)

شکل ( 8 - 1 ) نشان میدهد که هر رأس مضلع دارای دو زاویهٔ خارجی است که باهم انطباق پذیر اند .

## 1-6 قطر مضلع :

قطعه خط که دو رأس غیر مجاور مضلع را باهم وصل کند . قطر مضلع نامیده می شود مانند قطر های $\overline{AC}$ و $\overline{CD}$ شکل ( 9 - 1 ).

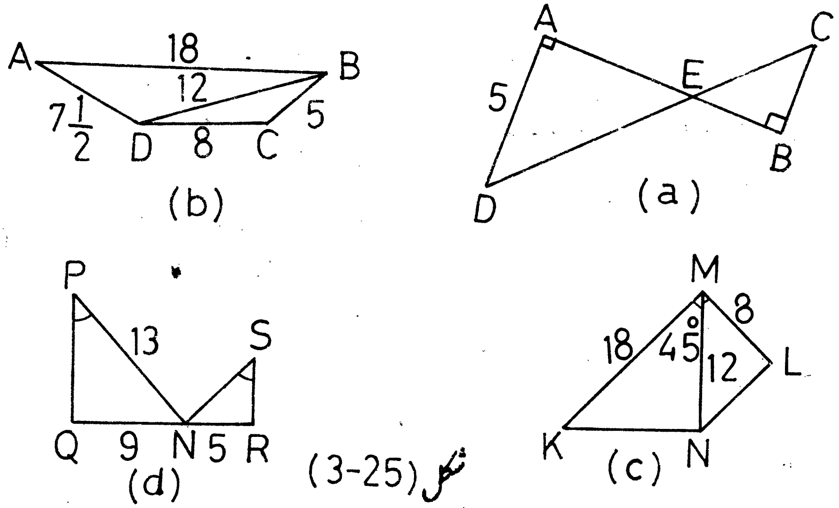



شکل ( 9 - 1 )

## 1 - 7 مضلع منظم :

مضلع متساوی الزوایا ویا متساوی الاضلاع را مضلع منظم نامند . مانند مثلث متساوی الاضلاع .

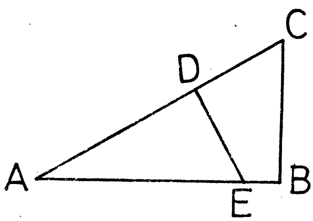
3- در شکل (3-25) توضیح دهید که هر جوره مثلث ها مشابه اند یا نه و اگر مشابه اند به اساس کدام قضیه.




شکل (3-25)

4- ثبوت کنید که تمام مثلث های متساوی الاضلاع باهم مشابه اند.

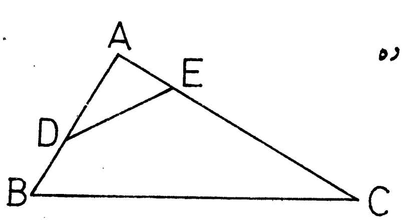
5- در شکل (3-26) زاویه B قایمه بوده و $\overline{AC}\perp\overline{DE}$ است. ثبوت کنید که مثلث های ABC و AED باهم مشابه اند.




شکل (3-26)

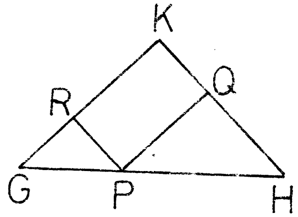
6- یک برج بلند 120 m سایه دارد. اگر درعین زمان یک پایهٔ تیلفون عمودی که 10 m بلندی دارد 4 m سایه تولید نماید ارتفاع برج را پیدا کنید.

7- در شکل (3-27) $\overline{AE}\cdot\overline{AC}=\overline{AB}\cdot\overline{AD}$ داده شده آیا مثلث های مذکور باهم مشابه اند.



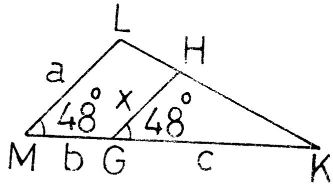

شکل (3-27)

8- در مثلث GHK شکل (3-28) $\overline{GK}=\overline{HK}$ و $\overline{PR}\perp\overline{GK}$ و $\overline{PQ}\perp\overline{HK}$ اند ثبوت نمائید که $\overline{GR}\cdot\overline{PQ}=\overline{PR}\cdot\overline{HQ}$




شکل (3-28)

9- در شکل (3-29) $\overline{ML}\parallel\overline{GH}$ داده شده فاصله x را از جنس a، b و c دریافت نمائید.



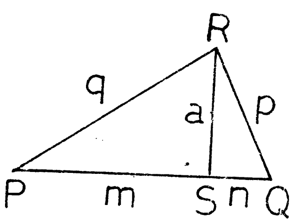

شکل (3-29)

10- در شکل (3-30) $\overline{RS}$ ارتفاع و $\overline{PQ}$ وتر مثلث PQR است.

(a) اگر $m=24cm$، $n=6cm$ باشد a، p و q را پیدا کنید

(b) اگر $m=\sqrt{24}$ و $n=\sqrt{8}$ باشد a، p و q را پیدا کنید

(c) اگر $p=15cm$ و $n=9cm$ باشد m، q را پیدا کنید



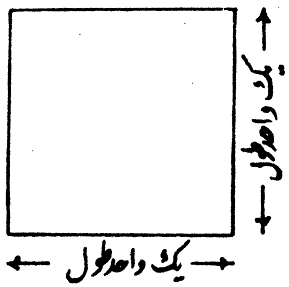

شکل (3-30)

# فصل چهارم

## مساحت مضلعات

### 1 - 4 مساحت :

واحد اندازه نمودن مساحت عبارت از مساحت مربعی است که طول هریک از اضلاع آن یک واحد طول باشد و مساحت دایم یک عدد مثبت است شکل (1 - 4)



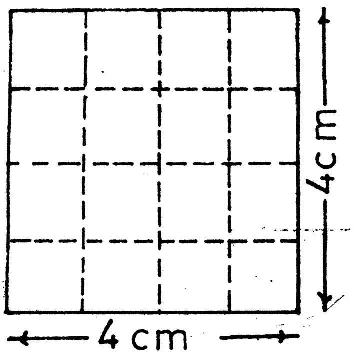

شکل (1 - 4)

**مثال اول :** مساحت مربعی را دریافت نمائید که طول هر ضلع آن یک سانتی متر (1cm) باشد .

**حل :**

$$1cm \times 1cm = 1cm^2$$

**مثال دوم :** مساحت مربعی را دریافت نمائید که طول هر ضلع آن 4 cm باشد شکل (2 - 4)




شکل (2 - 4)

**حل :**

$$4cm \times 4cm = 16cm^2$$

در سیستم متریک مساحت یک شکل را به متر مربع ($1m^2$)* اندازه میکنند .

**تبصره :** واحد اندازه نمودن زمین در افغانستان جریب است .

یک گز جریب تقریباً $\frac{11}{15}$ متر است .

یک جریب زمین معادل به مساحت مربع است که هر ضلع آن 72 ,44 متر یا 60,83 گز است .

---

* نوټ : متر مربع عبارت از سطح مربعی است که طول هر ضلع آن یک متر باشد .

مساحت یک جریب زمین مساوی به $2000m^2$ ویا 3700 گز مربع جریب است ویا :

(یک جریب) $44,72\ m \times 44,72\ m \cong 2000\ m^2$

(یک جریب) گز جریب مربع 3700≅ گز 60،83 x 60،83 گز

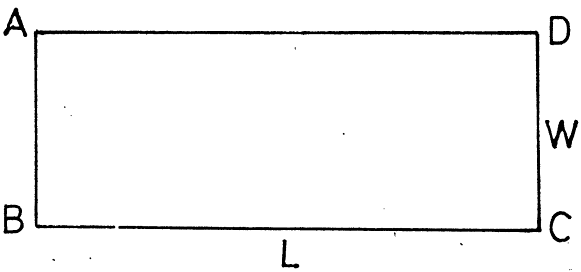
یک جریب ← 20 بسوه ← $2000\ m^2$

یک بسوه ← 20 بسوانه ← $100\ m^2$

## 2 - 4 مساحت مستطیل :

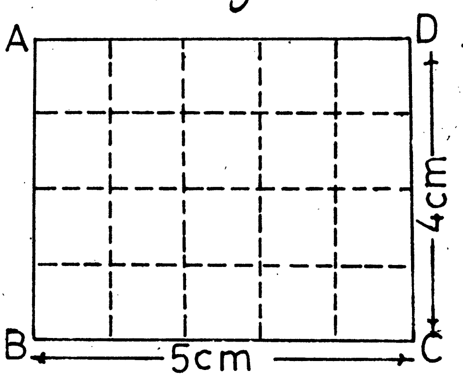
مساحت یک مستطیل مساوی به حاصل ضرب طول وعرض آن است شکل (4 - 3)

**مثال** : اگر طول یک مستطیل 5cm وعرض آن 4cm باشد مساحت مستطیل را محاسبه نمائید .




شکل (4 - 3)

**حل** : قرار شکل (4 - 4) طول مستطیل به پنج حصه مساوی وعرض آن را به چار حصه مساوی تقسیم میکنیم از نقاط منقسم ، مستقیم های موازی به $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ رسم می نمائیم الحال دیده میشود که مستطیل مذکور به 20 مربع کوچک تقسیم شده است که هر قسمت آن یک سانتی متر مربع مساحت دارد . اگر طول مستطیل را به L وعرض آن را به W نشان دهیم مساحت مستطیل را فارمول ذیل ارائه میکند :



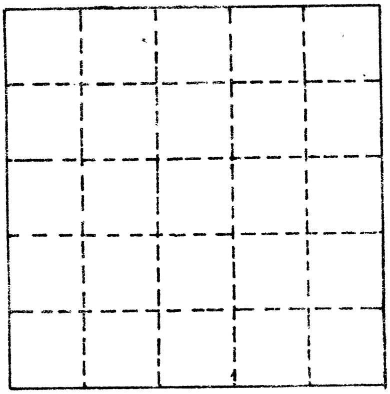

شکل (4 - 4)

مساحت مستطیل $A = L \times W = L \cdot W$

$$A = 5cm \times 4cm = 20\ cm^2$$

## 4 - 3 مساحت مربع :

اگر طول وعرض یک مستطیل باهم مساوی باشند این نوع مستطیل را مربع نامند اگر طول یک ضلع مربع را a ومساحت مربع را A بنامیم مساحت مربع توسط فورمول ذیل محاسبه میشود :



شکل (5 - 4)

$$A = a \cdot a = a^2$$

**مثال :** اگر طول یک ضلع مربع 5cm باشد مساحت مربع فوق را محاسبه نمائید.

**حل :** مطابق شکل (5-4) اضلاع مربع را به پنج حصه مساوی تقسیم میکنیم. نقاط منقسم را قرار شکل (5-4) باهم وصل میکنیم اگر دقت نمائید 25 دانه مربع حاصل میشود که هریک آن یک سانتی متر مربع مساحت دارد :

$$A = 5cm \times 5cm$$

$$= 25\,cm^2$$

### تمرین 1 - 4 :

1 - پنج جریب چند متر مربع میشود.

2 - $5000m^2$ چند جریب است.

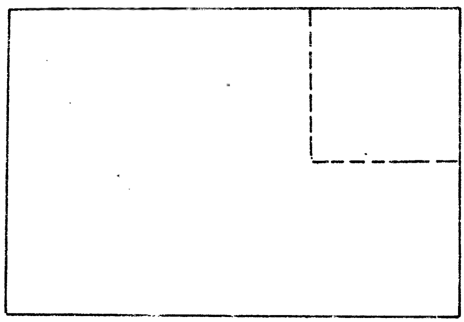
3 - اگر طول یک زمین مستطیل شکل 30m وعرض آن 15m باشد مساحت آن را دریافت نمائید.

4 - اگر طول یک زمین مستطیلی 55m وعرض آن 40m باشد مساحت آن را به جریب وبسوه محاسبه نمائید.

5 - اگر طول یک زمین مستطیل شکل 30 گز جریب وعرض آن 15 گز جریب باشد مساحت آن را به متر مربع حساب نمائید.

6 - مساحت مستطیلی را محاسبه نمائید که طول آن 16 m وعرض آن 10,2 m باشد.

7 - در شکل (6 - 4) اگر طول مستطیل کلان سه چند طول مستطیل کوچک و عرض مستطیل کوچک نصف عرض مستطیل کلان باشد مساحت آنها را محاسبه نمائید.



شکل (6 - 4)

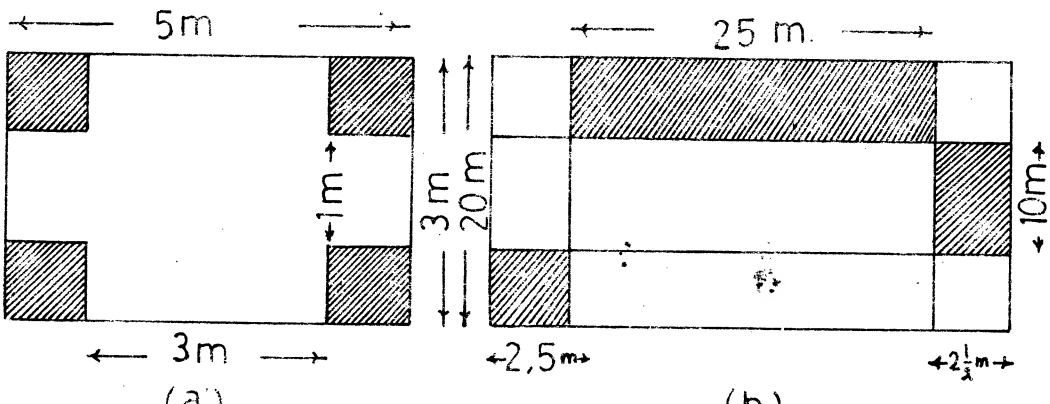
8 - اگر طول ضلع یک مستطیل دو چند گردد و عرض آن تغیر نخورد در مساحت آن چه تغیر بوجود می آید؟

9 - اگر طول و عرض یک مستطیل دو چند شود در مساحت آن چه تغیر واقع میشود؟

10 - اگر اضلاع یک مربع نصف شود مساحت مربع که توسط نصف اضلاع بوجود می آید با مربع اصلی مقایسه نمائید.

11 - یک مربع و مستطیل عین مساحت را دارند اگر طول مستطیل 25cm و عرض آن 16c m باشد ضلع مربع چند سانتی متر طول دارد؟

12 - در شکل (7 - 4) مساحت قسمت های مخطط را دریافت نمائید.

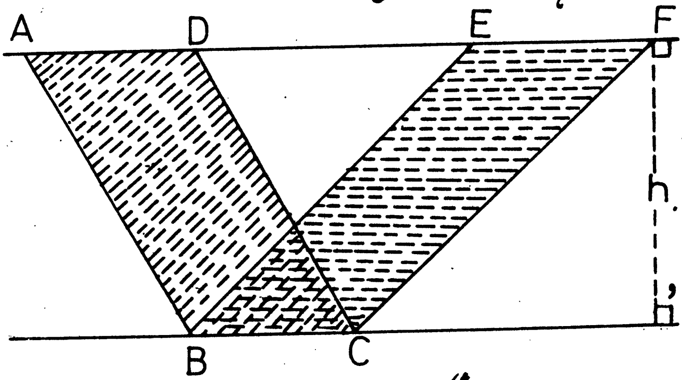



شکل (7 - 4)

## 4-4 قضیه:

مساحت متوازی الاضلاع های که بین دو خط موازی واقع بوده و دارای عین ارتفاع باشند باهم مساوی است.

**مفروض:** متوازی الاضلاع های ABCD و EBCF دارای قاعدهٔ مشترک $\overline{BC}$ و در بین خطوط موازی $\overline{AF}$ و $\overline{BC}$ واقع بوده و ارتفاع آنها h است شکل (8-4)




شکل (8-4)

**مطلوب:** میخواهیم ثبوت نمائیم که مساحت متوازی الاضلاع ABCD و EBCF باهم مساوی میباشد.

**ثبوت:** مثلث های $F\hat{D}C$ و $E\hat{A}B$ انطباق پذیر اند زیرا:

1 - $\overline{AB} = \overline{DC}$ ........ اضلاع مقابل متوازی الاضلاع اند

2 - $B\hat{A}E \cong C\hat{D}F$ ...... متوافقه

3 - $D\hat{C}F \cong A\hat{B}E$ .... اضلاع آنها باهم موازی اند.

پس، $E\hat{A}B \cong D\hat{F}C$ ........... (I)

وهم شکل $ABCF \cong ABCF$ ........ (II)

اگر از مساوات II مساوات I را قرار ذیل تفریق نمائیم داریم که:

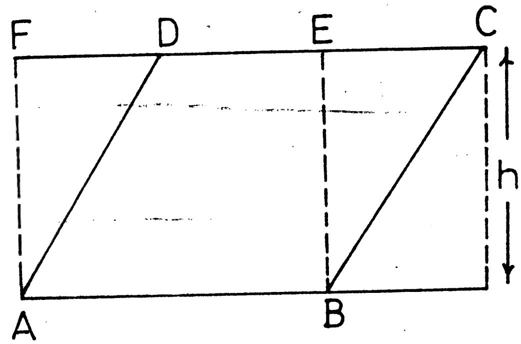
$$ABCF - E\hat{A}B = ABCF - D\hat{F}C$$

ویا

مساحت ABCD = مساحت EBCF

## 4 - 5 قضیه :

مساحت یک متوازی الاضلاع مساوی به حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن است شکل (9-4) .




شکل (9-4)

**مفروض :** متوازی الاضلاع ABCD که ارتفاع آن h است داده شده است .

**ترسیم :** از نقاط A و B عمودهای $\overline{AF}$ و $\overline{BE}$ را بالای $\overline{DC}$ رسم می نمائیم .

**ثبوت :** مساحت متوازی الاضلاع ABCD و مستطیل ABEF که دارای قاعدهٔ $\overline{AB}$ بوده و بین دو خط موازی واقع اند نظر به قضیه (4-4) باهم مساوی اند .

مساحت ABEF = مساحت ABCD ........ (I)

مساحت ABEF = $\overline{AB} \cdot \overline{BE}$ ........ (II)

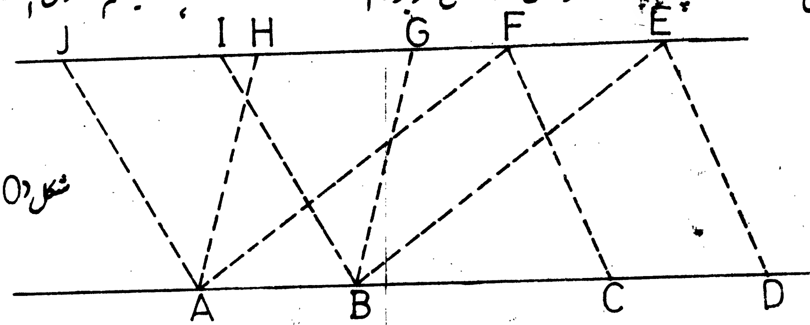
از مقایسهٔ مساوات های I و II داریم که :

مساحت ABCD = $\overline{AB} \cdot \overline{BE}$

و یا مساحت ABCD = $\overline{AB} \cdot h$

## تمرین 2 - 4 :

1 - در شکل (10-4) چند عدد متوازی الاضلاع موجود است که مساحت آنها باهم مساوی است .




شکل (10-4)

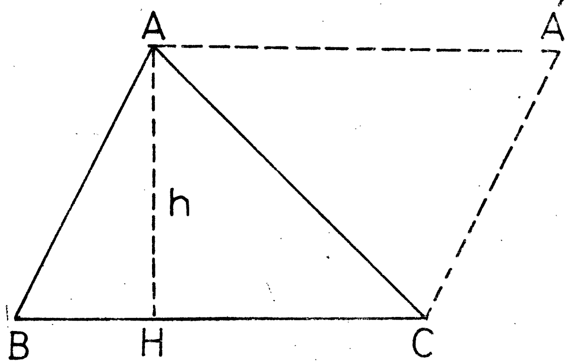
2 ـ مساحت معین را دریافت نمائید که طول ضلع آن 4cm و ارتفاع آن 3cm باشد

3 ـ ارتفاع معین را دریافت نمائید که طول ضلع آن 5cm و مساحت آن $20cm^2$ باشد

4 ـ قاعده متوازی الاضلاع را دریافت نمائید که ارتفاع آن 8cm و مساحت آن $32cm^2$ باشد.

## 6 - 4 قضیه :

مساحت یک مثلث مساوی به نصف مساحت متوازی الاضلاع است که با مثلث داده شده دارای عین قاعده و ارتفاع باشد شکل (11-4) .




شکل (11 - 4)

**مطلوب :** میخواهیم ثابت نمائیم که مساحت مثلث ABC مساوی نصف مساحت متوازی الاضلاع ABCÁ است که قاعدهٔ آن $\overline{BC}$ و ارتفاع آن h است .

**ثبوت :** $A\hat{B}C \cong A\hat{C}\acute{A}$ . . . چرا

مساحت متوازی الاضلاع ABCÁ = مساحت مثلث ABC + مساحت مثلث ACÁ

و یا

مساحت متوازی الاضلاع ABCÁ = $A\overset{\triangle}{B}C + A\overset{\triangle}{B}C$

مساحت متوازی الاضلاع ABCÁ = $2\, A\overset{\triangle}{B}C$

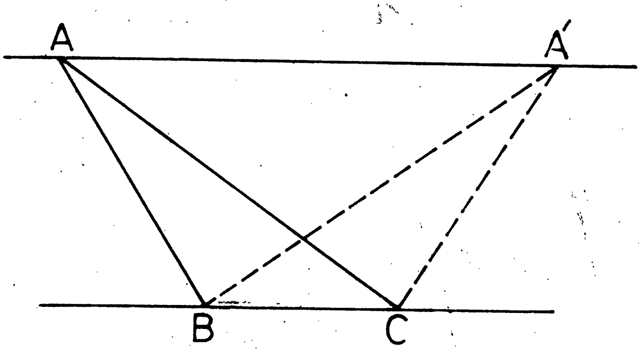
$$A\overset{\triangle}{B}C = \frac{1}{2}\, ABC\acute{A}$$

$$A\overset{\triangle}{B}C = \frac{1}{2}\, \overline{BC} \cdot h$$

**تبصره :**

1 ـ دو مثلث که دارای عین قاعده بوده و ارتفاع آنها باهم مساوی باشد مساحت آنها نیز باهم مساوی است .

2. خطوط $\overline{AA'}$ و $\overline{BC}$ باهم موازی اند مثلث های $A\hat{B}C$ و $A'\hat{B}C$ دارای مساحت مساوی میباشند شکل (4-12)




شکل (4-12)

## تمرین 4-3 :

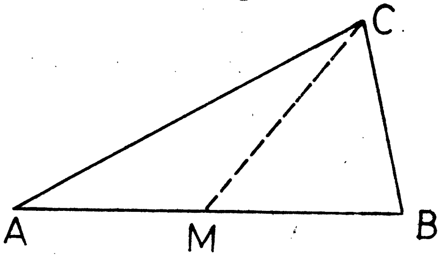
1 - اگر قاعدهٔ یک مثلث را به b و ارتفاع آنرا به h ارایه نمائیم مساحت مثلث های ذیل را دریافت نمائید

$b = 24\,cm$ ، $h = 8,4\,cm$ (I)

$b = 33,4\,cm$ $h = 10\,cm$ (II)

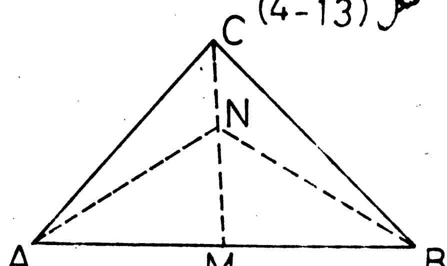
2 - اگر قاعدهٔ مثلث $1,8\,cm$ و مساحت آن $5,4\,cm^2$ باشد ارتفاع مثلث را دریافت نمائید.

3 - در مثلث ABC طول $\overline{MB} = \overline{AM}$ است نشان دهید که مساحت $C\hat{A}M$ مساوی به مساحت $C\hat{M}B$ میباشد شکل (4-13)



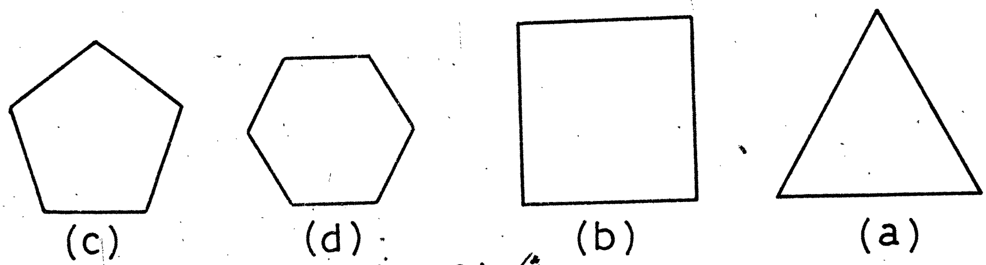

شکل (4-13)

4 - اگر M نقطهٔ تنصیف $\overline{AB}$ مثلث ABC باشد و N یک نقطهٔ کیفی $\overline{CM}$ باشد نشان دهید که مساحت مثلث های $A\hat{C}N$ و $B\hat{C}N$ باهم مساوی است شکل (4-14)




شکل (4-14)

مربع ، پنج ضلعی منظم ، شش ضلعی منظم وغیره . شکل ( 10 - 1 )



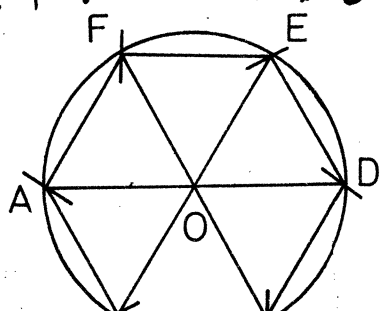
شکل ( 10 - 1 )

1-7-1 **قضیه :**- یک مضلع منظم را که راس های آن بالای محیط دایره ( O,R ) واقع باشند ترسیم میکنیم .

**مفروض :**- دایرهٔ که مرکز آن O وشعاع آن R میباشد داده شده است شکل ( 11-1 ) .

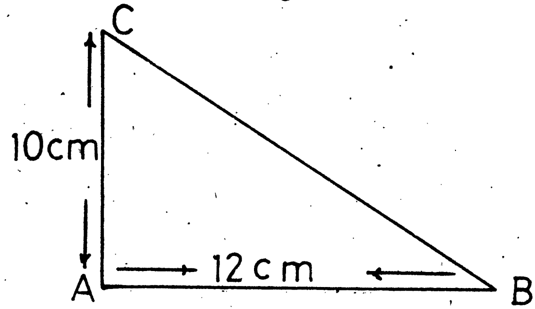
**مطلوب :**- میخواهیم چند ضلعی منظمی را رسم کنیم که رأس های آن بالای دایره واقع باشند .

**ترسیم :**- میدانید که وترهای مساوی مقابل قوس های مساوی قرار دارند و قوس ها معرف اندازه زوایای مرکزی مقابل خود میباشند . بناءً $360^\circ$ رابالای تعداد اضلاع مضلع منظم مطلوب تقسیم میکنیم . فرضاً مضلع مورد نظر شش ضلعی باشد . پس $360^\circ$ را بر 6 تقسیم میکنیم خارج قسمت $60^\circ$ است ( $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ) بعداً شش زاویه مرکزی را که وسعت هر کدام آنها $60^\circ$ است جدا کرده اضلاع این زوایا را امتداد میدهیم تا محیط دایره را قطع نمایند نقاط تقاطع را به F ، E ، D ، C ، B و A نشان میدهیم . بعد A را به B ، B را به C ، C را به D ، D را به E ، E را به F و F را به A وصل میکنیم . ABCDEF عبارت



شکل ( 11-1 )

5 - مساحت مثلث ABC را محاسبه نمائید شکل (15 - 4)

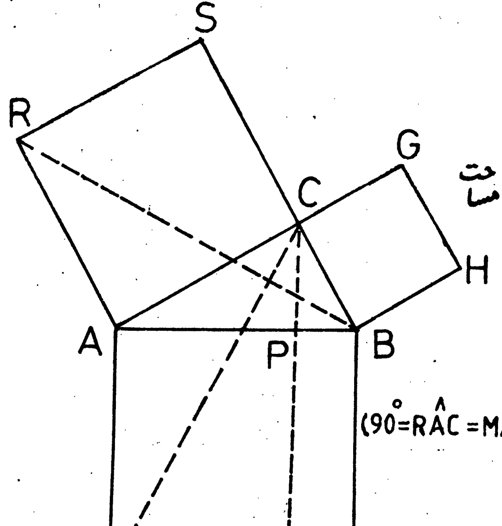



شکل (15 - 4)

7 - 4 قضیه : مساحت مربعی که بالای وتر مثلث قایم الزاویه رسم شود مساوی است به مجموع مساحات مربعات که بالای اضلاع قایم مثلث مذکور رسم میشود شکل (16 - 4)

**مفروض** : مثلث قایم الزاویه ABC داده شده است که زاویهٔ C آن قایمه است .

**ترسیم** : مربع ABKM را بالای ضلع $\overline{AB}$ مربع BCGH را بالای ضلع $\overline{BC}$ و مربع ACSR را بالای ضلع AC رسم میکنیم و نقطهٔ C را به M و B را به R وصل نموده و عمود $\overline{CQ}$ را رسم می نمائیم




شکل (16 - 4)

**مطلوب** : میخواهیم ثابت نمائیم که :

مساحت ABKM = مساحت BCGH + مساحت ACSR

و یا $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$

**ثبوت**

$(90^\circ = R\hat{A}C = M\hat{A}B)$ ------- $R\hat{A}C + C\hat{A}B = M\hat{A}B + C\hat{A}B$ - a

b - مثلث های $R\hat{A}B$ و $C\hat{A}M$ انطباق پذیر اند زیرا :

1 - $\overline{AR} = \overline{AC}$ ..... چرا

2 - $\overline{AM} = \overline{AB}$ ..... چرا

3 - $C\hat{A}M = R\hat{A}B$ .... قدم a

c - مساحت مربع ACSR دو

چند مساحت مثلث RAB است یعنی

$2\ R\hat{A}B$ مساحت مثلث = $AC\overset{\square}{R}S$ مساحت مربع .... بین خطوط موازی $\overline{BS}$ و $\overline{AR}$ واقع اند

d - $2C\hat{A}M$ مساحت مثلث = $A\overset{\square}{M}QP$ مساحت مربع .... بین خطوط موازی $\overline{CQ}$ و $\overline{AM}$ واقع اند

نظر به قدم b داریم که :

I ...... مساحت ACSR = مساحت AMQP

اگر H را به A و C را به K وصل نمائیم خواهیم داشت

II ...... مساحت PQKB = مساحت BHGC

اگر مساوات I و II را طرف به طرف جمع نمائیم داریم که :

$B\overset{\square}{H}GC$ مساحت + ACSR مساحت = $P\overset{\square}{Q}KB$ مساحت + AMQP مساحت

BHGC مساحت + ACSR مساحت = AMKB مساحت

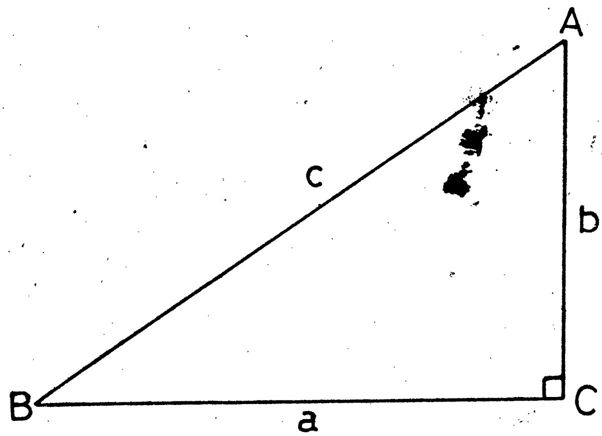
و یا : $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

پس مربع وتر مساویست به مجموع مربعات دو ضلع قایم یک مثلث قایم الزاویه .

## تمرین 4 - 4 :

1 - اگر مثلث ABC قایم الزاویه باشد شکل (17 - 4) در سوال a الی h جای های خالی را تکمیل نمائید .

a - $a = 6$ $b = 8$ $c = ?$




شکل (4-17)

b - $a = 24$ $b = 10$ $c = ?$

c - $a = ?$ $b = 2$ $c = 6$

d - $a = 2$ $b = ?$ $c = 4$

e - $a = ?$ $b = 4$ $c = 8$

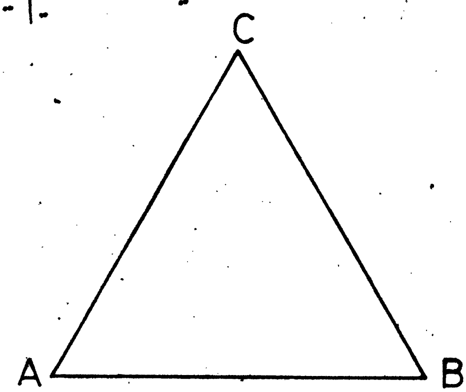
f - $a = 1$ $b = 1$ $c = ?$

g - $a = ?$ $b = 2$ $c = 3$

h - $a = 8$ $b = ?$ $c = 17$

2 - اگر ضلاع یک مثلث بالترتیب 3 ، 4 و 5 باشد نشان دهید که مثلث مذکور قایم الزاویه است.

3 - اگر ضلاع یک مثلث بالترتیب 5cm، 12cm و 13cm باشد نشان دهید که مثلث مذکور قایم الزاویه است




شکل (4-18)

4 - مثلث ABC یک مثلث متساوی الاضلاع است اگر طول یک ضلع آن 8cm باشد مساحت مثلث را دریافت نمائید شکل (4-18)

5- کدام یکی از مثلث های ذیل قایم الزاویه است ؟

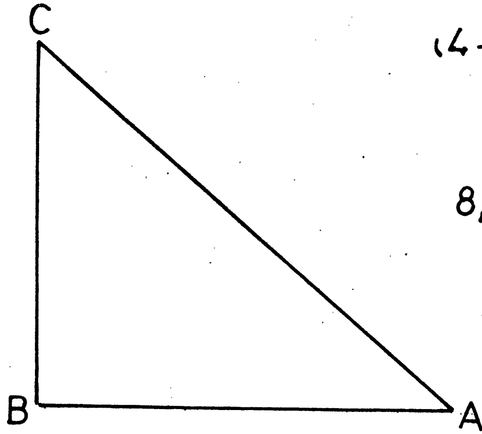
a - $a = 14cm$ $b = 48cm$ $c = 50cm$

b - $a = 20cm$ $b = 10cm$ $c = 41cm$

c - $a = 20cm$ $b = 99cm$ $c = 101cm$

6 - یک درخت چنار 4m بلندی دارد طول سایه آن 3m است فاصله بین نوک درخت چنار ونوک سایه آنرا معلوم نمائید شکل (19-4)

7 - دریک مثلث قایم الزاویه ABC طول اضلاع قایم آن 6,1cm و 8,1cm است طول وتر آنرا معلوم نمائید.



شکل (19-4)

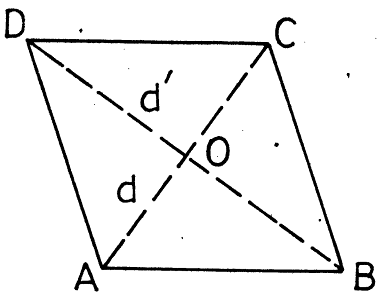
## 4-8 قضیه :

مساحت لوزی مساوی به نصف حاصل ضرب قطرهای آن است .

**مفروض :** لوزی ABCD داده شده است .

**مطلوب :** میخواهیم ثابت نمائیم که مساحت لوزی ABCD مساوی به $\frac{d \cdot d'}{2}$ است

d و d' قطرهای لوزی ABCD است شکل (20-4)



شکل (20-4)

**ثبوت :** قطرهای لوزی (ثبوت نمائید) باهم عمود اند

هریک از قطرها لوزی را به دو حصهٔ مساوی تقسیم می نماید

مساحت لوزی ABCD = مساحت مثلث ABD + مساحت مثلث DBC

چون $A\hat{B}D \cong D\hat{B}C$ است .

اگر عوض $D\hat{B}C$ قیمت آن را درمعادله بالا وضع نمائیم داریم که :

مساحت لوزی ABCD = 2 ( $A\hat{B}D$) ....... I

مساحت مثلث ABD عبارت است از :

مساحت ABD = $\frac{\overline{AO} \times \overline{DB}}{2}$ ........ II

ازروابط I و II چنین نتیجه حاصل میشود که :

$$\text{مساحت } ABCD = 2\left(\frac{\overline{AO} \times \overline{DB}}{2}\right)$$

$$\text{مساحت } ABCD = \overline{AO} \times \overline{DB}$$

اگر $\overline{AO} = \frac{d}{2}$ و $\overline{DB} = d'$ وضع شود درآن صورت داریم :

$$\text{مساحت } ABCD = \frac{d \cdot d'}{2}$$

## تمرین 5-4 :

1 - آیا مربع یک لوزی است ؟

2 - آیا مربع یک متوازی الاضلاع است ؟

3 - میتوانید ده خواص یک مربع رانام برید ؟

4 - اگر نقاط تنصیف اضلاع یک لوزی را باهم بالترتیب وصل نمائیم یک متوازی الاضلاع حاصل میشود آیا جملهٔ فوق صحت دارد ؟

5 - اگر قطرهای یک مستطیل باهم عمود باشند آیا مستطیل مذکور مربع است ؟

6 - آیا یک هکتار $100m \times 100m$ است ؟

## 9 - 4 قضیه :

مساحت ذوذنقه مساوی به نصف مجموع قاعده تین ضرب در ارتفاع آن است

مفروض : ذوذنقه ABCD با قاعده تین $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ داده شده است .

مطلوب : میخواهیم ثابت نمائیم که مساحت ABCD عبارت است از :

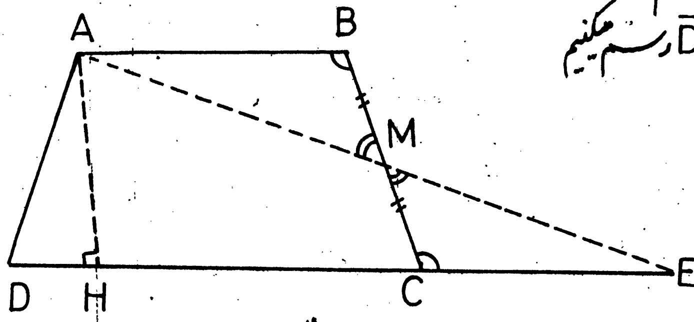
$$\text{مساحت } ABCD = \left(\frac{AB + DC}{2}\right) \cdot \overline{AH}$$

ترسیم : نقطهٔ تنصیف $\overline{BC}$ را به M نشان داده و $\overline{AM}$ را امتداد داده تا امتداد یافته

$\overline{DC}$ را در نقطه E قطع نماید هم چنان

از نقطهٔ A عمود $\overline{AH}$ را بالای $\overline{DC}$ رسم میکنیم

شکل (21 - 4).




شکل (4 - 21)

**ثبوت :**

$\hat{MCE} \cong \hat{AMB}$ ... چرا

پس $\overline{AB} = \overline{CE}$

بنا بر آن مساحت ذوذنقه ABCD مساوی

به مساحت مثلث ADE است یعنی

$$\text{مساحت } A\hat{D}E = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{DE}}{2} \ldots\ldots I$$

چون $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{AB} \ldots\ldots II$

هرگاه ما قیمت $\overline{DE}$ را در رابطهٔ ( I ) وضع کنیم نتیجه میشود که :

$$\text{مساحت } A\hat{D}E = \left(\frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2}\right) \cdot \overline{AH}$$

ویا

$$\text{مساحت ذوذنقه } ABCD = \text{مساحت مثلث } ADE = \left(\frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2}\right) \cdot \overline{AH}$$

## تمرین 6 - 4 :

1 - اضلاع غیر موازی یک ذوذنقه علی الترتیب 5cm و 6cm است و اضلاع موازی آن 10cm و 12cm است طول خط که نقاط تنصیف اضلاع غیر موازی را باهم وصل میکند دریافت نمائید .

2 - اگر نقاط تنصیف اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع را باهم وصل نمائیم آیا یک مثلث متساوی الاضلاع را تشکیل میدهد .

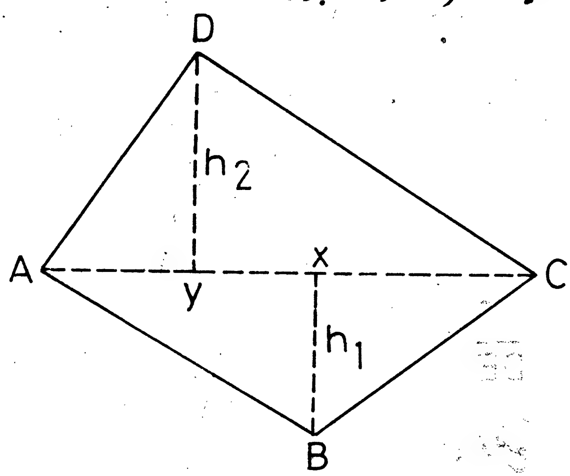
3 - اگر نقاط تنصیف اضلاع یک چهار ضلعی کیفی را با الترتیب باهم وصل نمائیم آیا یک متوازی الاضلاع را تشکیل میدهد؟

اگر جواب صحیح است آنرا ثابت نمائید.

4 - اگر قاعده‌تین یک ذوزنقه بالترتیب 8cm و 12cm باشد طول خط راکه نقاط تنصیف اضلاع غیر موازی رابا هم وصل میکند دریافت نمائید.

## 4-10 قضیه :

مساحت چارضلعی کیفی مساوی است به نصف یکی از قطرها، ضرب در مجموع ارتفاعات که از رؤس آن بالای قطر مذکور رسم میگردد شکل (22 - 4).




شکل (4-22)

**مفروض :** چارضلعی ABCD داده شده است.

**مطلوب :** میخواهیم ثابت نمائیم که مساحت چارضلعی ABCD مساوی به نصف یکی از قطرها ضرب در مجموع ارتفاعات که بالای قطر مذکور رسم میگردد است.

**ترسیم :** ارتفاعات $\overline{Bx}=h_1$ و $\overline{Dy}=h_2$ را بالای قطر $\overline{AC}$ رسم میکنیم.

**ثبوت :** قطر AC را به d نشان میدهیم

$$\text{مساحت } A\hat{D}C + \text{مساحت } A\hat{B}C = \text{مساحت } A\hat{B}CD \quad \ldots\ldots\ldots\ldots I$$

چون $A\hat{B}C = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{Bx}$ مساحت است

$A\hat{D}C = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{Dy}$ مساحت است.

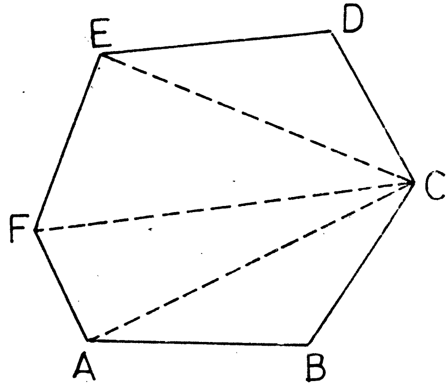
پس،

$$\text{مساحت چارضلعی } ABCD = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot Bx + \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{Dy}$$

$$\text{مساحت چارضلعی } ABCD = \frac{1}{2}dh_1 + \frac{1}{2}dh_2$$

$$\text{مساحت چارضلعی } ABCD = \frac{d}{2}(h_1 + h_2)$$

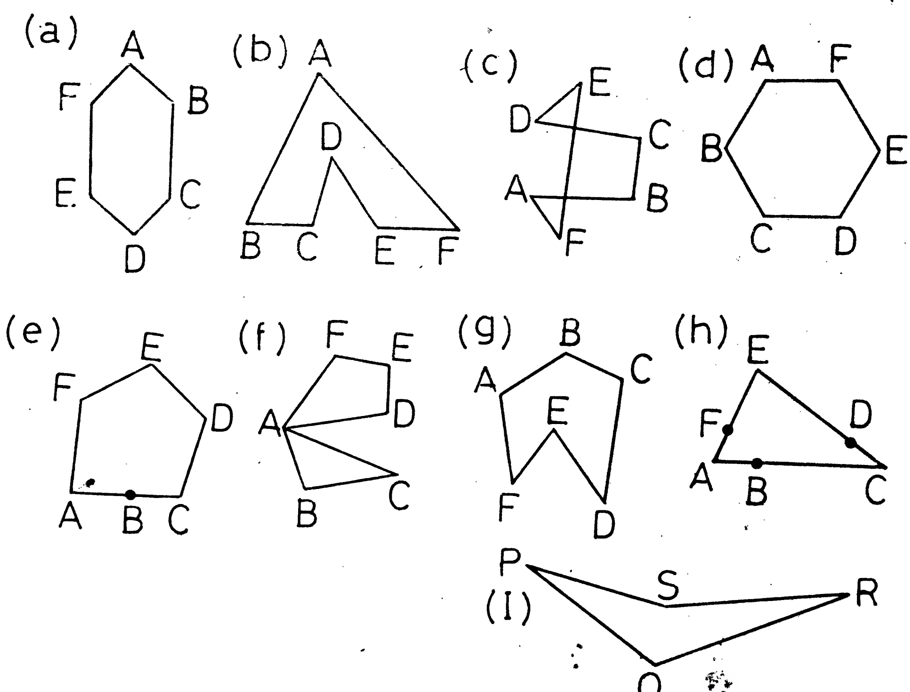
**نوت :** مساحت یک مضلع را میتوانید مطابق شکل (4-23) دریافت نمائید درین صورت مضلع به مثلث ها تقسیم شده است مساحت هر مثلث را دریافت نموده و آنها را باهم جمع نمائید.




شکل (4-23)

## تمرین 4-7 :

1 - کدام یکی از اشکال (4-24) مسدس است و نیز بگوئید که کدام یکی مسدس منظم است.




شکل (4-24)

2 - قطرهای یک لوزی علی الترتیب 10cm و 8cm است مساحت آنرا محاسبه نمائید.

3 - مساحت ذوذنقه را دریافت کنید که اضلاع موازی آن 6.2cm و 18cm بوده وارتفاع

آن 3cm باشد.

4 - درشکل (4-22) اگر $\overline{AC}=17cm$ و $\overline{Bx}=12cm$ و Dy=0,09m باشد مساحت ABCD را محاسبه نمائید.

5 - ABCD یک مستطیل است P ، Q ، R و S بالترتیب نقاط تنصیف اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ میباشد.

a - ثبوت نمائید که PQRS یک معین است

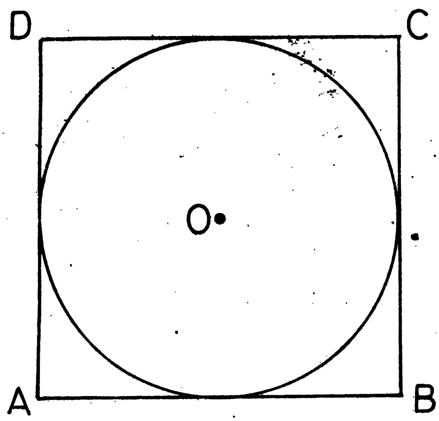
b - ثبوت نمائید که مساحت PQRS نصف مساحت ABCD است.

6 - مربع ABCD به اطراف دایره (O) مماس است

اگر شعاع دایره 4cm باشد شکل (4-25)

a - مساحت مربع ABCD را دریافت نمائید

b - طول هر یک از قطرهای مربع را دریافت نمائید.




شکل (4-25)

# تمرینات فصل چهارم

## گروپ اول :

در سوالات ذیل به دور جواب صحیح دایره بکشید.

1 ـ مساحت مربع که طول یک ضلع آن 13cm باشد عبارت است از :

a ـ 169 cm　　　b ـ 169

c ـ $169cm^2$　　　d ـ هرسه جواب درست است .

2 ـ قاعدهٔ یک مثلث 16cm وارتفاع آن 12cm است مساحت آن عبارت است از :

a ـ $96 m^2$　　　b ـ 96m

c ـ 96cm　　　d ـ $96cm^2$

3 ـ قاعدهٔ یک مثلث قایم الزاویه 200mm وطول ضلع قایم عمود به قاعدهٔ 150mm است مساحت آن عبارت است از :

a ـ 150000mm　　　b ـ $15000mm^2$

c ـ $1500cm^2$　　　d ـ هرسه غلط است .

4 ـ دایره که به هرچهار ضلع متوازی الاضلاع مماس باشد متوازی الاضلاع را......... نامند :

a ـ مستطیل.　　　b ـ مربع .

c ـ لوزی .　　　d ـ هرسه غلط ست .

5 ـ اگرضلع یک مربع سه چند مربع دیگر باشد مساحت مربع اولی معادل است به :

a ـ 3 چند مربع دومی .　　　b ـ 9 چند مربع دومی .

c ـ 6 چند مربع دومی .　　　d ـ هرسه غلط است .

از شش ضلعی مطلوب است .

**ثبوت :** به آسانی ثبوت شده میتواند که هریک از مثلث های حاصله متساوی الساقین و درعین زمان باهمدیگر انطباق پذیر اند پس :

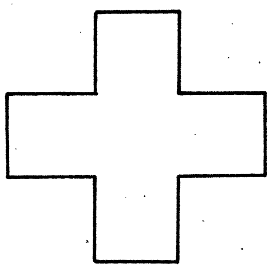
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$ بوده و شکل ABCDEF عبارت از شش ضلعی منظم است*. در مضلع منظم شش ضلعی مثلث های حاصله متساوی الاضلاع میباشند .

**تمرین 2-1 :**

۱- آیا یک مربع یک مضلع منظم است ؟ و نیز بگوئید که یک مثلث متساوی الاضلاع یک مضلع منظم است

2 - آیا یک مضلع متساوی الاضلاع منظم باید ضرور متساوی الزاویه باشد ؟ اگر جواب مثبت است . پس چرا ؟

3 - در شکل ( 12 - 1 ) تمام اضلاع مضلع مساوی و زوایای آن انطباق پذیر است . آیا این شکل یک مضلع محدب است ؟ .



شکل ( 12-1 )

## 1-8 مجموعه وسعت زوایای داخلی یک مضلع :

در صنوف گذشته مطالعه نمودیم که مجموعه وسعت زوایای داخلی یک مثلث $180^\circ$ است .

---

***نوت :** با استفاده از روش فوق میتوانیم سه ضلعی منظم ، چهار ضلعی منظم ، پنج ضلعی منظم ، هشت ضلعی منظم... وغیره را رسم کنیم .

## گروپ دوم :

به مقابل سوال درست (ص) و به مقابل سوال غلط (غ) بگذارید.

( ) 1 – مثلثی که طول اضلاع آن 9 ، 12 و 15 باشد قایم الزاویه است .

( ) 2 – مثلثی که طول اضلاع آن 9 ، 16 ، 25 باشد مثلث مذکور قایم الزاویه است

( ) 3 – اگر قاعده یک مثلث دو چند گردد مساحت مثلث چار چند میشود.

( ) 4 – اگر طول یک ضلع مستطیل سه چند شود مساحت آن نیز سه چند میشود.

( ) 5 – نسبت مساحت دو دایره متناسب به نسبت شعاعات آنها است .

( ) 6 – در دو مثلث متشابه نسبت مساحت آنها مساوی به مربع نسبت طول اضلاع آنها است .

( ) 7 – یک جریب مساوی به 2000 m متر است .

( ) 8 – یک بسوه مساوی به $100 m^2$ است .

( ) 9 – یک بسوه مساوی به 20 بسواسه است .

( ) 10 – هر مربع یک متوازی الاضلاع است .

( ) 11 – هر متوازی الاضلاع یک مربع است .

( ) 12 – هر معین یک متوازی الاضلاع است .

## گروپ سوم :

جاهای خالی را با الفاظ مناسب تکمیل نمائید .

1 - اگر طول وعرض یک مستطیل دوچند شود مساحت آن ...... چند میشود .

2 - اگر طول یک ضلع مربع سه چند شود مساحت آن ....... میشود .

3 - اگر شعاع یک دایره زیاد شود مساحت آن نیز ...... میشود .

4 - اگر طول ارتفاع یک مثلث نصف شود مساحت آن ...... میشود

5 - اگر یک ضلع معین 65cm باشد محیط آن .... است .

6 - دو مضلع انطباق پذیر دارای مساحت ...... میباشد .

7 - مساحت یک شبه منحرف مساوی به حاصل ضرب ارتفاع و .... قاعده تین است .

8 - یک جریب معادل به $m^2$ .......... است .

9 - بسوه کوچکتر از .... نیست

10 - مساحت هر مربع مساوی به ....... ضرب ..... است .

# فصل پنجم

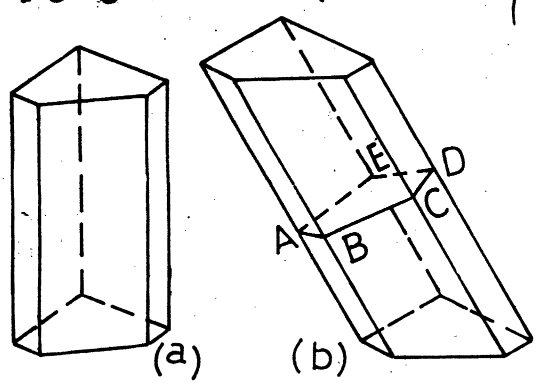
## احجام

### 5-1 اندازه نمودن مساحت و حجم اجسام :

فضائی را که یک جسم اشغال مینماید حجم همان جسم نامیده میشود.

### 5-1 منشور :

منشور جسم هندسی منظم است که سطوح متقابل آن باهم مساوی و موازی بوده و زوایای سطوح متقابل نیز باهم انطباق پذیر باشد. شکل (1-5).




شکل (1-5)

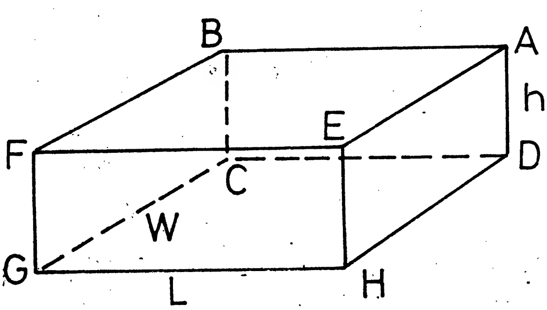
### 5-3 مکعب مستطیل :

منشور منظم است که دارای شش سطح بوده و زوایای سطوح متقابل قایم باشند شکل (2-5)

اگر طول قاعدهٔ مکعب مستطیل را به $L$ و عرض آن را به $W$ و ارتفاع آنرا به $h$ ارایه نمائیم و هم اگر مساحت کلی مکعب مستطیل را به $A$ و حجم آنرا به $V$ نشان دهیم مساحت کل و حجم منشور عبارت است از :

$A = 2(LW+Lh+Wh)$ مساحت کلی مکعب مستطیل

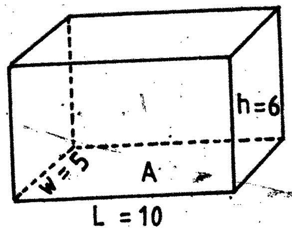
$V = L \cdot W \cdot h$ حجم مکعب مستطیل




شکل (2-5)

**مثال :** مساحت کلی و حجم مکعب مستطیل را دریافت نمائید که طول آن 10 cm ، عرض آن 5cm و ارتفاع آن 6 cm. باشد شکل (3 - 5)

**حل :**




شکل (3 - 5)

$$A = 2(LW + Lh + Wh)$$

$$A = 2(10 \times 5 + 10 \times 6 + 5 \times 6)$$

$$= 2(50 + 60 + 30)$$

$$= 2(140)$$

$$= 280 cm^2$$

$$V = L \cdot W \cdot h$$

$$= 10 \times 5 \times 6 = 300 cm^3$$

**تمرین 1 - 5 :**

1 - اگر طول سنگ کاری یک دیوار 30m ، عرض آن 60cm و ارتفاع آن 120cm باشد حجم سنگ کاری را به متر مکعب دریافت نمائید .

2 - اطاقیکه 5 m طول ، 3 m عرض و 2,5 m ارتفاع دارد هوای داخل اطاق را دریافت نمائید که چند متر مکعب است .

3 - اگر 600 دانه خشت یک متر مکعب حجم داشته باشد دیواریکه دارای 9m طول ، 3 m ارتفاع و 50 cm عرض باشد چند عدد خشت ضرورت دارد .

4 - اگر طول یک اطاق 4 m ، عرض آن 3 m و ارتفاع آن 2,5 m باشد .

I - حجم اطاق را به $m^3$ دریافت نمائید .

II - حجم اطاق را به $cm^3$ دریافت نمائید .

III - مساحت کل داخل اطاق را به $m^2$ دریافت کنید .

5- اگر طول یک چوب چارتراش 2m عرض آن 60cm وارتفاع (ضخامت) آن 120cm باشد

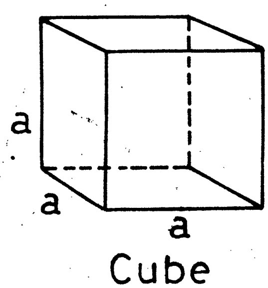
a - حجم چارتراش را به $m^3$ دریافت نمائید

b - حجم چارتراش را به $cm^3$ دریافت نمائید.

c - مساحت کل چارتراش را به متر مربع دریافت نمائید.

## 5 - 4 مکعب:

مکعب عبارت از مکعب مستطیل است که طول، عرض وارتفاع آن باهم مساوی باشد شکل (5 - 4) اگر طول یک خط الرأس مکعب را به a ، مساحت کلی را به A وحجم آنرا به V نشان دهیم:




شکل (5-4)

$$A = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$$

ویا

$$A = 6a^2$$

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

**مثال:** حجم ومساحت کل مکعب را دریافت نمائید که ارتفاع آن 1,5 m باشد

**حل:**

$$A = 6(1,5m)^2 = 6 \times 1,5m \times 1,5m$$

$$= 13,5m^2$$

$$V = (1,5m)^3 = 3,375\,m^3$$

## تمرین 2 - 5 :

1 - حجم و مساحت کل مکعب ها ی راکه خط الرأس آن قرار ذیل است دریافت نمائید .

I - $a = 24cm$      II - $a = 3\frac{3}{5}\,m$

III - $a = \sqrt{7}\ m$      IV - $a = 4\sqrt{6}\,m$

2 - مساحت کلی وحجم مکعبی را دریافت نمائید که طول یک ضلع آن 8 m باشد

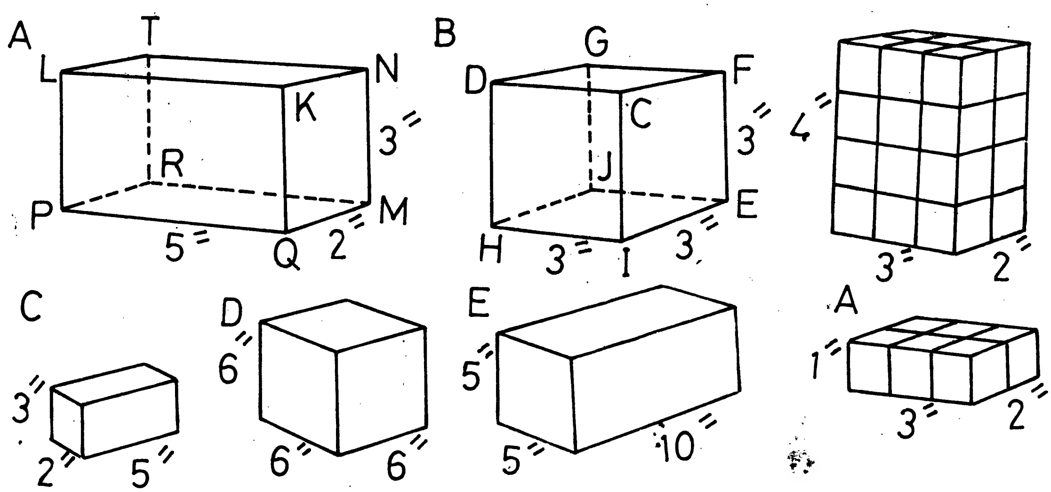
3 - طول ضلع یک مکعب 10 cm واز مکعب دیگری 5 cm است .

a - حجم مکعب اولی چند برابر حجم مکعب دومی است .

b - فرق بین سطح کلی مکعب اولی ومکعب دومی را دریافت نمائید .

4 - اگر حجم یک مکعب $8\,m^3$ باشد طول خط الرأس مکعب مذکور را دریافت نمائید .

5 - حجم ومساحت کل اجسام شکل ( 5 - 5 ) رامحاسبه نمائید .




شکل ( 5 - 5 )

## 5 - 5 استوانه قایم :

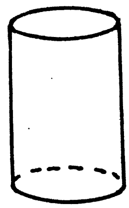
استوانه قایم جسمی است که قاعده تین آن دایروی بوده وسطح جانبی آن بر قاعده تین عمود باشد شکل (6-5) .

حجم استوانه قایم عبارت است از :

$$V = \pi r^2 h$$

درفوق r شعاع قاعده ، h ارتفاع

و $\pi = 3{,}14$ است



مساحت کلی استوانه عبارت ازمجموع مساحت قاعده تین جمع مساحت سطح جانبی :

شکل (5-6)

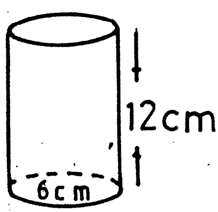
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A = 2\pi r (r + h)$$

**مثال اول** : قطی شیر پودری که شکل استوانه ئی دارد و دارای شعاع قاعده 6cm و ارتفاع 12cm است مساحت کل و حجم قطی را دریافت نمائید ( $\pi = 3{,}14$ ، شکل (5-7) )

**حل** :

مساحت کل :




$$A = 2\pi r (r + h)$$

$$= 2(3{,}14)(6)(6 + 12)$$

$$= 2(3{,}14)(6)(18)$$

$$= 678{,}24\ cm^2$$

شکل (5-7)

حجم :

$$V = \pi r^2 h$$

$$= (3{,}14)(6cm)^2(12cm)$$

$$= 1356{,}48\ cm^3$$

مثال دوم : حجم استوانهٔ را دریافت نمائید که شعاع قاعدهٔ آن 30 m و ارتفاع آن 75m باشد $\pi = 3,14$

حل :

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = (3,14)(30\,m)^2(75m)$$

$$= (3,14)(900\,m^2)(75m)$$

$$= 211950\,m^3$$

تمرین 3 - 5 :

1 - حجم و مساحت کل استوانه های را دریافت نمائید که شعاع و ارتفاع آنها قرار جدول ذیل داده شده باشد .

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| شعاع | 5cm | 14 m | 19m | $2\frac{1}{2}$ m | 160cm |
| ارتفاع | 8cm | 1000cm | 25m | 750m | 9,2m |

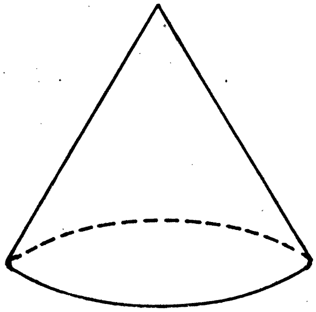
2 - چوب دستک که تقریباً شکل استوانه ئی را دارد دارای طول 5 m و قطر 18cm است حجم چوب را دریافت نمائید .

3 - سیلوی استوانه ئی که دارای قطر 12m و ارتفاع 20 m است حجم و سطح جانبی سیلو را دریافت نمائید.

4 - چاه کن یک چاه را حفر می نماید که دارای شش متر عمق و یک متر قطر میباشد اگر چاه کن مذکور روزانه $\frac{4}{5}$ متر چاه حفر کند معلوم نمائید که در چند روز چاه مذکور را حفر می کند و حجم خاک را که میکشد معلوم نمائید

## 5-6 مخروط :

مخروط قایم جسمی است که از دوران یک مثلث قایم الزاویه به اطراف یکی از اضلاع قایم آن حاصل میشود شکل (8-5) .



شکل (8-5)

حجم و مساحت کلی مخروط ذریعهٔ فورمول های ذیل بدست می آید

حجم مخروط $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

مساحت کل $A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

**مثال :** خرمن گندم که شکل مخروط را دارد دارای ارتفاع 1,5m و قطر 3 m است حجم و مساحت کل خرمن را دریافت نمائید .

**حل :** حجم خرمن عبارت است از :

$$V = \frac{1}{3}(3{,}14)(1{,}5)^2(1{,}5)$$

$$= \frac{1}{3}(3{,}14)(3{,}375)$$

$$= 3{,}5325 m^3$$

مساحت خرمن عبارت است از :

$$A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= (3{,}14)(1{,}5)^2 + (3{,}14)(1{,}5)\sqrt{(1{,}5)^2 + (1{,}5)^2}$$

$$= 7{,}065 + 4{,}71\sqrt{2{,}25 + 2{,}25}$$

$$= 7{,}065 + 4{,}71\sqrt{4{,}50}$$

$$= 7{,}065 + (4{,}71)(2{,}12)$$

$$= 7{,}065 + 9{,}9852$$

$$= 17{,}0502 m^2$$

## تمرین 4-5 :

1 - تودهٔ ریگ مخروطی دارای ارتفاع 2 m و قطر 4m است حجم ریگ را محاسبه نمائید.

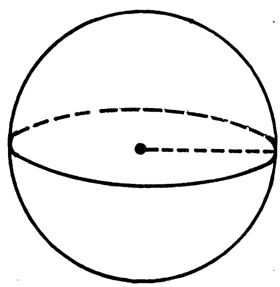
2 - خرمن جواری که شکل مخروطی را دارد و دارای قطر 6 m و ارتفاع 2 m متر است حجم جواری را دریافت نمائید و علاوتاً مساحت زمین را دریافت نمائید که خرمن اشغال نموده است.

3 - سطح جانبی، سطح کلی و حجم مخروط را دریافت نمائید که شعاع قاعدهٔ آن 6 m و ارتفاع آن 9m است.

4 - اگر حجم یک مخروط $198 cm^3$ و شعاع قاعدهٔ آن 3 cm باشد ارتفاع، سطح جانبی و سطح کلی مخروط را محاسبه نمائید.

## 7-5 کُره :

کره جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطهٔ ثابت متساوی الفاصله باشد. نقطهٔ ثابت را مرکز کره نامند مانند شکل (9-5).



شکل (9-5)

I - اگر مساحت سطح کره را A و شعاع آن را r بنامیم

$$A = 4\pi r^2$$

II - اگر حجم کره را V بنامیم.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

**مثال :** حجم و مساحت سطح کرهٔ را دریافت نمائید که قطر آن 10cm باشد

**حل :**

I - مساحت سطح کره :

$$r = \frac{d}{2} = \frac{10\,cm}{2} = 5\,cm$$

$$A = 4\pi r^2 = 4(3{,}14)(5\,cm)^2$$

$$= 314\,cm^2$$

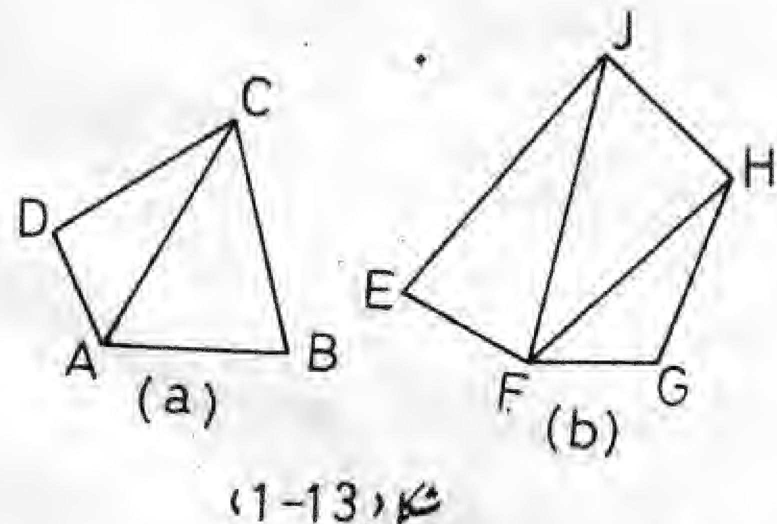
درشکل (1-13a) چهارضلعی ABCD داده شده باتعین هریکی از رأس های آن اگر قطر مضلع را رسم نمائیم می بینیم که دو مثلث ABC و ACD تشکیل میگردد. پس مجموعه وسعت زوایای داخلی مضلع ABCD عبارت از مجموعه وسعت زوایای داخلی این دو مثلث است یعنی :

$$180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

درشکل (1-13b) پنج ضلعی EFGHJ داده شده . باتعین هریکی از رأس های آن . اگر قطار آن رسم شود . سه مثلث بدست می آید. بطور مثال اگر از رأس F قطرهای $\overline{FH}$ و $\overline{FJ}$ رسم شوند . سه مثلث EFJ ، FHJ و FGH بدست می آید . پس مجموعه وسعت زوایای داخلی مضلع EFGHJ مساوی به مجموعه وسعت زوایای داخلی این سه مثلث است یعنی :

$$180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$$

پس مجموع وسعت زوایای داخلی مضلع مذکور مساوی به $540^\circ$ است .




شکل (1-13)

از مثال های فوق چنین نتیجه میگیریم :

(a) ، در هر مضلع که زیاده تر از سه ضلع داشته باشد . باترسیم تمام قطرهای ممکنه از یک رأس مضلع به چند مثلث تقسیم میگردد . مجموعه وسعت زوایای داخلی مضلع مساوی به مجموعه وسعت زوایای

II - حجم کره

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}(3,14)(5cm)^3$$
$$= 523,33\,cm^3$$

**تمرین 5 - 5 :**

1 - حجم کره های را دریافت نمائید که شعاع آنها قرار ذیل است.

1 - $r = 6cm$    2 - $r = 6\frac{3}{4}cm$    3 - $r = 9cm$

2 - اگر حجم یک کره $V = \frac{32}{3}\pi m^3$ باشد شعاع کره را دریافت نمائید.

3 - توپ فتبال که شکل کروی را دارد دارای شعاع 10cm است. مساحت سطح و حجم توپ مذکور را دریافت نمائید.

4 - اگر محیط دایرهٔ کبیره یک کره $12\pi cm$ باشد حجم و مساحت سطح کره مذکور را دریافت نمائید.

5 - در جدول ذیل شعاع کره داده شده است حجم و مساحت سطح کره را محاسبه نموده و تحت ستون آن بنویسید.

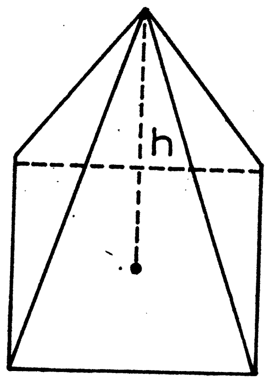
| r | 25cm | $\frac{3}{4}$ m | 314cm | 11 5m | 6000km |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | |
| V | | | | | |

## 5-8 هرم :

هرم جسم هندسی است که قاعدهٔ آن مضلع بوده و سطوح جانبی آن مثلث های است که رؤس آنها به یک نقطه متلاقی باشد. نقطهٔ تلاقی آنها را رأس هرم نامند اگر قاعدهٔ هرم مثلث باشد هرم را مثلث القاعده و اگر قاعدهٔ هرم بشکل مربع باشد هرم را مربع القاعده نامند وغیره.

## 5 - 9 هرم منظم :

هرم منظم جسمی هندسی است که قاعدهٔ آن یک مضلع منظم بوده و ارتفاع آن به مرکز قاعده آن عمود باشد شکل (10 - 5).




شکل (10 - 5)

### حجم هرم :

اگر حجم هرم را به V ارتفاع آن را به h و مساحت قاعدهٔ آن را به B نشان دهیم

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

**مثال اول :** حجم هرم مربع القاعده را دریافت نمائید که طول یک ضلع قاعده آن 5cm و ارتفاع آن 9cm باشد.

**حل :** مساحت قاعدهٔ هرم مساوی است به :

$$B = 5cm \times 5cm$$
$$= 25cm^2$$

اگر قیمت B و h را در فورمول $V = \frac{1}{3}B \times h$ وضع نمائیم داریم که :

$$V = \frac{1}{3} \times 25cm^2 \times 9cm$$
$$V = \frac{1}{3} \times 9 \times 25cm^3 = 75cm^3$$

**مثال دوم :** حجم هرم منظم مثلث القاعده را دریافت نمائید که مساحت قاعدهٔ آن $36cm^2$ بوده و دارای ارتفاع 8cm باشد.

**حل :** چون $B = 36cm^2$ ، $h = 8cm$ است

پس :

$$V = \frac{1}{3} 36cm^2 \times 8cm = \frac{1}{3} \times 36cm^2 \times 8cm$$
$$V = 12 \times 8cm^3 = 96cm^3$$

## تمرین 5-6 :

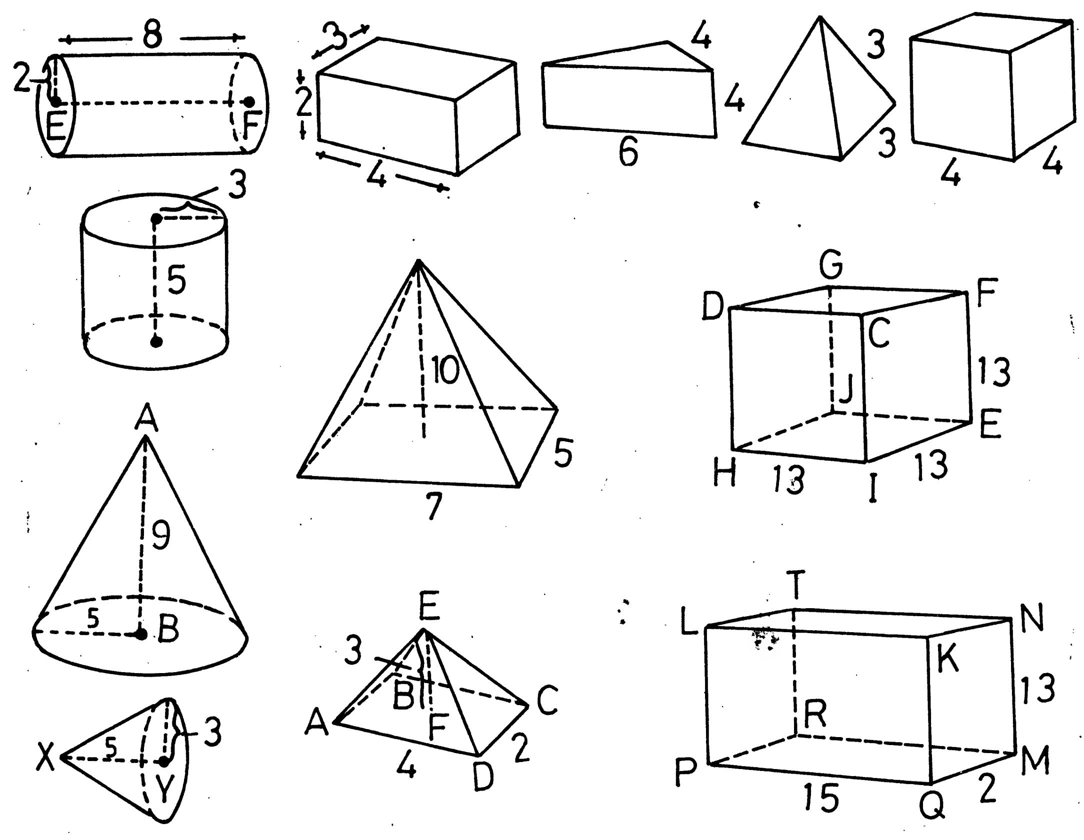
1 - حجم هرم را دریافت نمائید که قاعدهٔ آن مربع بوده طول ضلع آن 40m و ارتفاع هرم 27m است .

2 - حجم هرم مستطیل القاعده را دریافت کنید درصورتیکه طول مستطیل 20cm ، عرض مستطیل 15cm و ارتفاع هرم 30cm باشد .

3 - چند متر مکعب هوا داخل خیمهٔ مربع القاعده موجود است درصورتیکه طول ضلع مربع 7m و ارتفاع هرم 5m باشد .

4 - حجم هرم مربع القاعده را دریافت نمائید که طول ضلع آن $12\frac{1}{2}$m و ارتفاع آن 15 m باشد

5 - حجم اجسام اشکال (5-11) را دریافت نمائید .




شکل (5-11)

# تمرینات عمومی

## گروپ اول :

درسوالات ذیل برای هر سوال چهار جواب داده شده دور جواب صحیح دایره بکشید .

1 – اگر طول یک مستطیل 6m وعرض آن 4 m باشد مساحت آن عبارت است از :

a – $12\ m^2$     b – $24\ m^2$

c – $36\ m^2$     d – $16\ m^2$

2 – اگر طول یک مکعب مستطیل 6 m ، عرض آن 4 m وارتفاع آن 3 m باشد حجم آن عبارت است از :

a – $24\ m^2$     b – $24\ m^3$

c – $72\ m^2$     d – $72\ m^3$

3 – اگر یک ضلع مکعب 5 متر باشد حجم آن عبارت است از :

a – $25\ m^2$     b – $25\ m^3$

c – $125\ m^2$     d – $125\ m^3$

4 – اگر ارتفاع یک مخروط که قاعدهٔ آن دایروی است 20cm وشعاع قاعدهٔ آن 10cm باشد حجم آن عبارت است از :

a – $2093,3\ cm^3$     b – $2093,3\ cm^2$

c – $209,33\ cm^2$     d – $209,33\ cm^3$

5 – اگر شعاع یک کره 20m باشد حجم آن عبارت است از :

a – $334\,93,3\ m^2$     b – $33523,81\ m^3$

c – $334,933\ m^3$     d – $33,4933\ m^3$

6 - اگر شعاع قاعده یک استوانه 5 m و ارتفاع آن 10 m باشد حجم آن عبارت است از :

a - $7850\ m^3$　　b - $785,0\ m^3$

c - $78,50\ m^3$　　d - هر سه غلط است .

7 - هرم که قاعده آن مربع است طول یک ضلع قاعدهٔ آن 4 cm و ارتفاع آن 6cm است حجم آن عبارت است از :

a - $24\ cm^3$　　b - $32\ cm^3$

c - $16\ cm^3$　　d - هر سه غلط است .

## گروپ دوم :

کدام یکی از افادات ذیل صحیح و کدام یکی غلط است مقابل صحیح (ص) و مقابل غلط ( غ ) بنویسید .

(　) 1 - حجم هرم عبارت از $\frac{1}{3}\pi r^2$ است .

(　) 2 - حجم مخروط عبارت از $\frac{1}{3}\pi r^2h$ است .

(　) 3 - حجم استوانه عبارت از $\pi r^2 h$ است .

(　) 4 - اگر S طول یک ضلع مکعب باشد حجم آن عبارت از $S^3$ است .

(　) 5 - اگر S طول یک ضلع مکعب باشد مساحت کل آن $6S^2$ است .

(　) 6 - اگر طول مکعب مستطیل a ، عرض آن b و ارتفاع آن c باشد حجم آن عبارت از abc است .

(　) 7 - حجم کره عبارت از $\frac{3}{4}\pi r^3$ است .

(　) 8 - مساحت سطح کره عبارت از $4\pi r^2$ است .

## گروپ سوم :

جای های خالی را با الفاظ مناسب خانه پُری نمائید .

1 - طول × عرض × ارتفاع عبارت از .......... یک جسم است .

2 - اگر طول یک ضلع یک مکعب 2 cm باشد حجم آن ......... است

3 - مکعب مستطیل که طول عرض و ارتفاع آن مساوی باشد عبارت از ......... است

4 - کُره جسمی است که تمام نقاط سطح آن از ......... متساوی الفاصله باشد .

5 - منشور جسمی است که رأس آن به یک .......... منتهی شود .

6 - مخروط جسمی است که قاعدهٔ آن ......... بوده و رأس آن یک ......... باشد .

7 - استوانه جسمی است که قاعده تین آن .......... باشد .

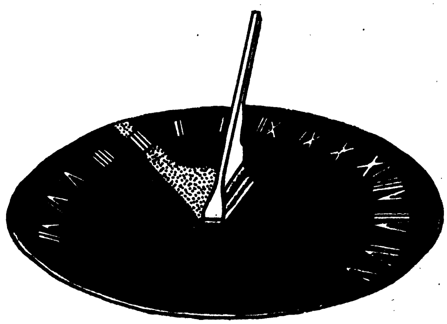
8 - منشور و مخروط دو جسم مختلف .......... میباشند .

# فصل ششم

## مثلثات

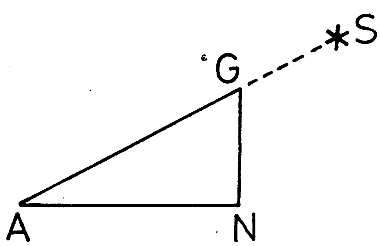
### 6 - 1 مقدمه :

درمصر 1500 سال قبل از میلاد ساعت آفتابی مورد استفاده قرار داشت شکل (6 - 1).



شکل (6 - 1)

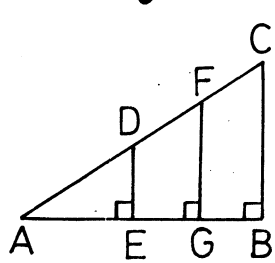
درشکل مقابل میله که طول آن ثابت است درنقطهٔ N وسک (تاوه) عموداً محکم گردیده است طول سایهٔ میله $\overline{GN}$ عبارت از $\overline{AN}$ میباشد طول سایه یا $\overline{AN}$ باکم شدن و زیاد شدن زاویه A مربوط است درشکل (6 - 2) موقعیت آفتاب را نشان میدهد وهم درزمان قدیم علما میدانستند که نسبت $\frac{\overline{GN}}{\overline{AN}}$ تابع زاویه A است.




شکل (6 - 2)

درشکل (6 - 3) درمثلث های $A\hat{B}C$ ، $A\hat{G}F$ و $A\hat{E}D$ زاویه $\hat{A}$ درآنها مشترک و

$\hat{B} \cong \hat{G} \cong \hat{E} \cong 90^\circ$ است.




شکل (6 - 3)

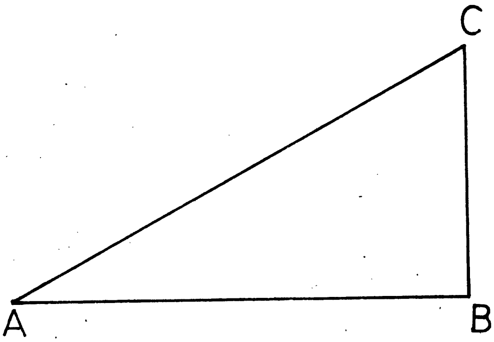
چون دوزاویه مثلث های مذکور باهم مساوی است پس زاویه سوم آنها نیز باهم مساوی است لذا :

$A\hat{E}D \sim A\hat{G}F \sim A\hat{B}C$ است

پس اضلاع مثلث های مشابه باهم متناسب است یعنی :

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$$

نسبت یکی از اضلاع قایم بر وتر یک مثلث قایم الزاویه را نسبت مثلثاتی آن نامند که ارتباط به کوچکی و بزرگی مثلث ندارد.




شکل (6-4)

## 6-2 تعریف Sine :

در مثلث قایم الزاویه ABC نسبت طول ضلع مقابل بر طول وتر را Sin زاویه A نامند شکل (6-4).

$$\text{Sin } A = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

## 6-3 Cosine :

در مثلث قایم الزاویهٔ ABC نسبت طول ضلع مجاور بر طول وتر عبارت از Cosine زاویه A است شکل (6-4).

$$\text{Cos } A = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

## 6-4 tangent :

در مثلث قایم الزاویه ABC. نسبت طول ضلع مقابل بر طول ضلع مجاور عبارت از tangent زاویه A است

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

---

نوت: (I) مخفف Sine عبارت از Sin ، مخفف Cosine عبارت از Cos و مخفف tangent عبارت از tan و یا tg است.

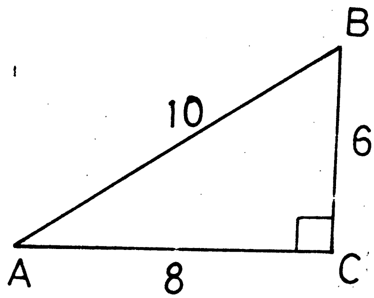
(II): Sin ، Cos و tan بدون ذکر زاویه در مقابل آنها الفاظ بی معنی است.

**مثال اول:** درشکل (6-5) $\sin A$، $\cos A$ و $\tan A$ را دریافت نمائید.

**حل:**

$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{6}{10}$$

$$\sin A = 0{,}6$$




$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{8}{10}$$

$$\cos A = 0{,}8$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{6}{8}$$

$$\tan A = 0{,}75$$

شکل (6-5)

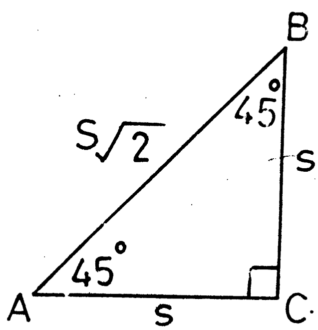
**مثال دوم:** $\sin 45^\circ$، $\cos 45^\circ$ و $\tan 45^\circ$ را دریافت نمائید.

**حل:** درمثلث قایم الزاویه اگریک زاویه آن $45^\circ$ باشد زاویهٔ دیگر آن نیز $45^\circ$ است.

درشکل (6-6) اگر $\overline{BC} = s$ باشد

چون $\overline{BC} = \overline{AC} = s$ است

نظر به دعوی فیثاغورث




$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

$$= S^2 + S^2 = 2S^2$$

$$AB = \sqrt{2} \cdot S$$

شکل (6-6)

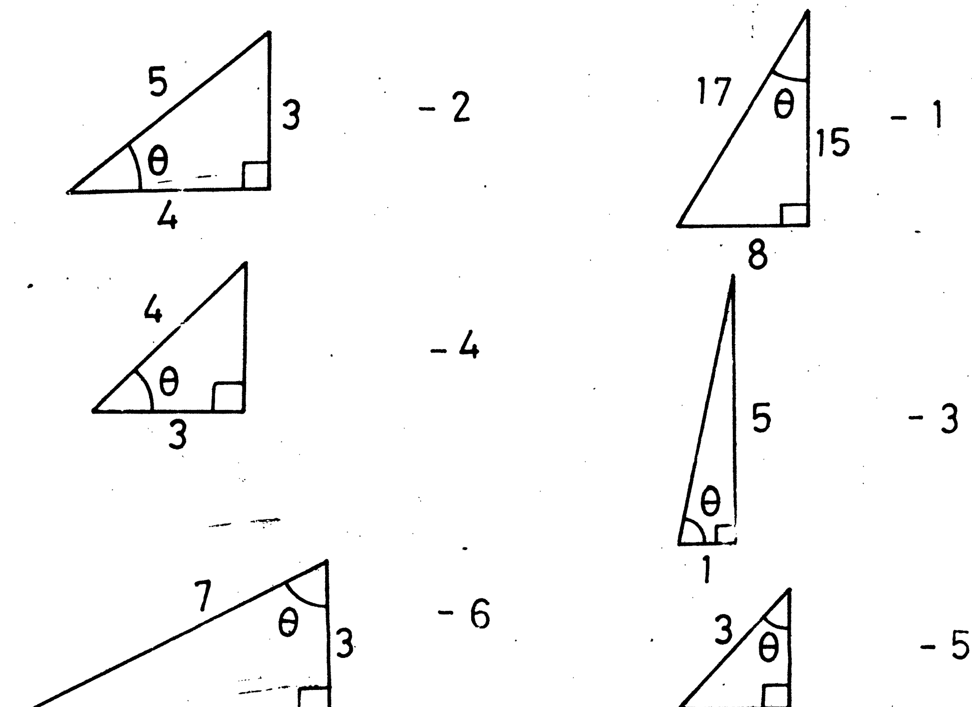
$$\tan 45^\circ = \frac{S}{S} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{S}{S\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{S}{S\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

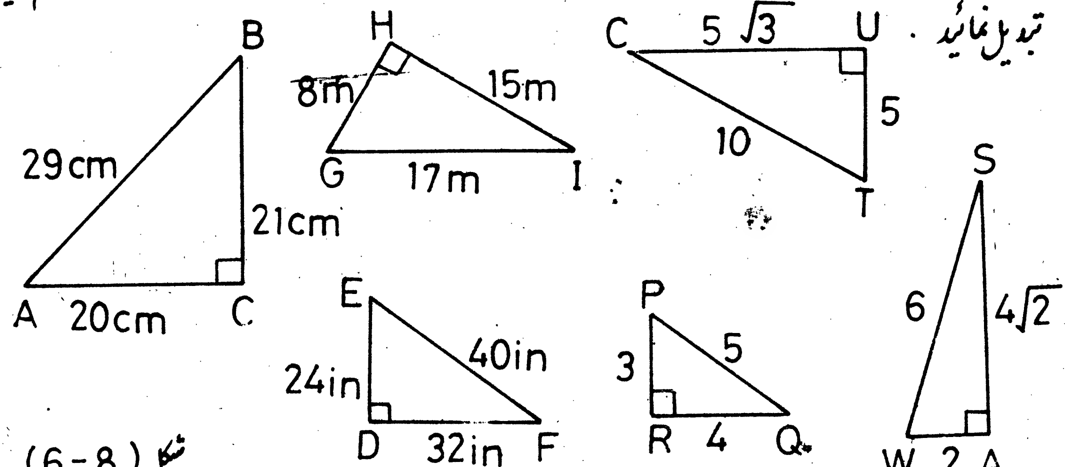
## تمرین 6-1 :

در اشکال (6-7)، Sinθ، Cosθ و tanθ را دریافت نمائید .




شکل (6-7)

در اشکال (6-8)، Sine، Cosine و tangent زوایای حاده را دریافت نموده وبعداً آنرا به کسر عشاریه تبدیل نمائید .



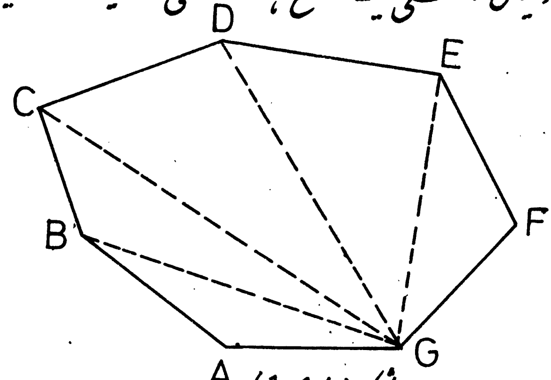

شکل (6-8)

داخلی مثلث های حاصله میباشد.

d ، b ، تعداد مثلث های حاصله از ترسیم اقطار مضلع از یک رأس عبارت از تعداد اضلاع مضلع منفی دو میباشد. بطور مثال درصورت چهار ضلعی دو مثلث ودرصورت پنج ضلعی سه مثلث بدست می آید.

پس باداشتن یک مضلع n ضلعی، تعداد مثلث های حاصله از ترسیم اقطار آن (n - 2) خواهد بود. پس مجموعه وسعت زوایای داخلی یک مضلع n ضلعی $180^\circ$(n - 2) میباشد.

**مثال:** مجموعه وسعت زوایای داخلی یک مضلع هفت ضلعی را دریافت نمائید شکل (14 - 1)




شکل (14-1)

**حل:** اگر قطرهای هفت ضلعی مربوط یک رأس را رسم نمائیم دیده میشود که پنج مثلث حاصل میشود. مجموع وسعت زوایای داخلی مضلع عبارت است از مجموع وسعت زوایای داخلی این مثلث ها یعنی:

$$180^\circ+180^\circ+180^\circ+180^\circ+180^\circ=900^\circ$$

ویا اگر مجموع وسعت زوایای داخلی مضلع را S وتعداد اضلاع آن را n بنامیم داریم که:

$$S=(n-2)\ 180^\circ$$

$$S=(7-2)\ 180^\circ$$

$$S=5\,(180^\circ)$$

$$S=900^\circ$$

# مقدمه

هدف تعلیم وتربیه بلند بردن سطح دانش شاگردان مطابق به خواست عصر و زمان امروزی با درنظرداشت معیارهای اسلامی میباشد. بدین منظور مواد وکتب درسی باید طوری آماده گردد تا در برآورده شدن هدف متذکره موثر باشد. دیپارتمنت تربیه معلم و مرکز تهیهٔ کتب درسی جهت تعلیم و تربیه افغانها مربوط مؤسسه خیریه I.R.C در مورد تهیه کتب درسی برای مکاتب مهاجرین و مجاهدین افغانی اقدام بعمل آورد. به سلسلهٔ تهیه کتب ما نوشتن کتاب هندسه برای صنف نهم را بدوش گرفته و آنرا در هشت فصل آماده نمودیم. در تهیه این کتاب سعی بعمل آمده تا مثالهای تطبیقی برای وضاحت موضوعات و تمرینات عمومی مختلف النوع در ختم هر فصل آورده شود.

از استادان محترم سید اشرف خان سابق مدیر مکتب تخنیک ثانوی، محترم شیر احمد عضو مرکز انکشاف کتب I.R.C محترم عبدالمقیم خان معلم لیسه I.R.C و رحیم الله خان سابق استاد انستیتوت پیداگوژی که با مشوره ها و نظریات خویش در تهیه این کتاب با ما همکاری نموده اند صمیمانه متشکریم.

در تهیه این کتاب تا حد ممکن کوشش بعمل آمده تا موضوعات مندرجه به زبان ساده و عام فهم بیان گردد. اما با آن هم از استادان محترم که تطبیق و تدریس این کتاب را بدوش دارند، شاگردان گرامی و علاقمندان خواهشمندیم تا نظریات پیشنهادات و انتقادات سازنده و اصلاحی خود را در مورد این کتاب به ما ارسال دارند.

ومن الله التوفیق.

غلام سخی

دکتور عبدالواحد "حسنی"

# فهرست

عنوان — صفحه

# فهرست

# فهرست

عنوان — صفحه

# فهرست

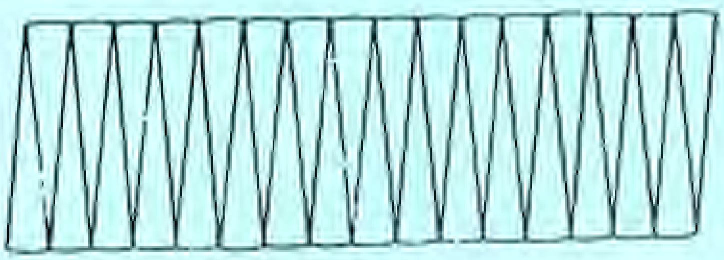
**عنوان** | **صفحه**

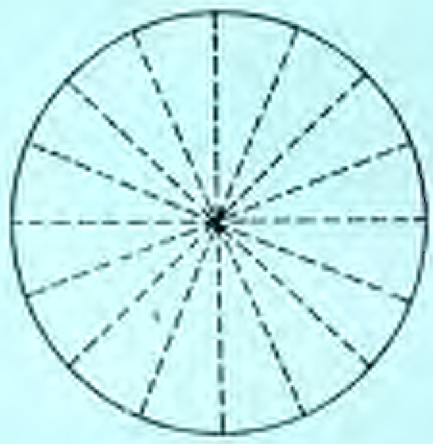
# فهرست

# هندسه



## صنف ۹





پروفیسور غلام سخی
دکتور عبدالواحد «حسنی»

۱۳۶۷

(هـ)

# فهرست

پروفیسور غلام سخی
دکتور عبدالواحد حسنی

# هندسه

برای صنف نهم

مرکز انکشاف تعلیم و تربیه برای افغانها
آی ، آر ، سی

پشاور ۱۳۶۷

Prof. GHULAM SAKHI

Dr. A. WAHED HASSANI

# GEOMETRY

For 9th Grade

INTERNATIONAL RESCUE COMMITTEE

Development Center for Afghan Education

DCAE Publication

Peshawar

March 1989

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

# پیشگفتار

مدت چند سال میشود که مؤسسهٔ خیریه آی . آر . سی خدمات صحی را برای مهاجرین افغان در پاکستان انجام میدهد بنابر نیازمندی های روز افزون تعلیم وتربیه تنظیم های جهادی ، مؤسسات مختلف خیریه وحکومت پاکستان سعی ورزیده اند تا پیشبرد یک سلسله خدمات مثمر تعلیم وتربیه را برای اولاد معصوم مهاجرین ومجاهدین افغان عهده دار شوند. مؤسسهٔ خیریه آی . آر . سی نیز به نوبه خود در اوایل ۱۹۸۵ تصمیم گرفت تا در پهلوی خدمات صحی خدمات لازم تعلیم وتربیه را بخاطر ارتقاء سطح دانش اولاد مهاجرین ومجاهدین افغان تقدیم دارد. بعد از انجام یک سلسله تحقیقات ومشوره ها با دانشوران و استادان افغانی چنین نتیجه بدست آمد که بمیان آوردن یک مرکز تعلیمی وتربیوی برای استادان لیسه ها ومکاتب متوسطه وتحریر کتب درسی برای صنوف هفتم وبالاتر از آن اشد ضرورت میباشد .

هدف این مؤسسه عبارت از کمک به اولاد افغان بدون درنظر داشت هرنوع تبعیض بوده مؤسسه سعی می ورزد تا پالیسی بیطرفانه خود را در مسایل سیاسی وتنظیمی حفظ کرده بصورت مساویانه مصدر خدمات برای تمام تنظیم ها ومهاجرین افغان گردد.

در پهلوی مشکلات دیگر تعلیمی عدم موجودیت کتاب های درسی خاصتاً در صنوف عالی یکی از پرابلم های عمده بوده که دامن گیر مکاتب مهاجرین افغان میباشد . چون مؤسسه در بخش مضامین ساینس وریاضی استادان ورزیده وتسهیلات لازم داشته لذا تصمیم اتخاذ گردید تا کتابهای ریاضی وساینس را برای صنوف هفتم وبالاتر از آن با درنظرداشت شرایط خاص جهادی وزندگی مهاجرین تحت رهنمائی های دین مقدس اسلام وحفظ احساسات اصیل کلتور افغانی تحریر کرده وبعد از ارزیابی واصلاحات لازم ذریعهٔ استادان لیسه های مختلف و دانشوران افغانی وکمشنری افغان کتابها چاپ شده وبطور رایگان به دسترس متعلمین واستادان مکاتب مهاجرین از طریق مؤسسات مربوطهٔ آنها گذاشته شود. امید است که خوانندگان محترم از روی همکاری نظریات مفید وثمر بخش شان را به مؤسسه تعلیم وتربیه آی . آر . سی اطلاع دهند به امید موفقیت وهمکاری های بیشتر تان .

ومن الله التوفیق

اداره